Previsioni dal passato: un vecchio problema da un punto di vista moderno

Angelo VULPIANI

Dept. of Physics, University of Rome “Sapienza”, Italy

10 Dic 2012, Convegno MAXXI

Perché le previsioni?

Fare previsioni è sempre stata un'aspirazione naturale ed importante;
perché si pensa sia possibile farle?

Osservazione della regolarità:

Il vento soffia a mezzogiorno, poi gira a tramontana;
gira e rigira e sopra i suoi giri il vento ritorna ......
Ciò che è stato sarà e ciò che si è fatto si rifarà;
non c'è niente di nuovo sotto il sole.
(Ecclesiaste)

Esistono "regole" (i.e. **LEGGI della NATURA**)

I problemi

Prima cosa da capire

Quali sono le variabili rilevanti?
Questo è un problema MOLTO sottile, è stato necessario aspettare Galileo e Newton per capire che la variabile “giusta” non era solo la posizione ma anche la velocità.

Seconda cosa da capire

Che tipo di legge regola il sistema?
Il sistema è deterministico? Cioè dato lo stato iniziale $\mathbf{x}(0)$ il futuro è determinato; questo accade in meccanica.
Oppure c'è una regola probabilistica?

Diversi situazioni:

A: Le leggi di evoluzione esistono e si conoscono
B: Le leggi di evoluzione esistono e non si conoscono
C: Non sappiamo se le leggi di evoluzione esistono

Caso "semplice"

Sono note le variabili "giuste" e la legge di evoluzione è **deterministica**, ad esempio un'eq. differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

sotto ipotesi generale esiste la soluzione, cioè c'è una "regola" che determina l'evoluzione

$$\mathbf{x}(0) \to \mathbf{x}(t) = \mathbf{G}[t, \mathbf{x}(0)] \tag{2}$$

Due possibilità:

A la regola è nota esplicitamente → caso facile (in genere non interessante)

B la regola non è nota esplicitamente → caso più difficile ed interessante

Anche nel caso in cui le leggi di evoluzione sono note, nei problemi interessanti (caso **B**) nella pratica ci sono molte difficoltà:

I) Il sistema può essere "complicato"

Ad esempio ci sono tante variabili.
Questo è il caso dei problemi geofisici dove bisognerebbe trattare fenomeni su piccola scala, ma la risoluzione numerica non lo consente e quindi è necessaria una "modellizzazione" delle piccole scale.

II) Il sistema può essere caotico

Un piccolo errore sulle condizioni iniziali viene amplificato velocemente (esponenzialmente)

Il caos in due parole

H. J. Poincaré

Una causa piccolissima che sfugge alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. .... Ma se pure accadesse che le leggi della natura non avessero più alcun segreto per noi, anche in questo caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente .... può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diventa impossibile e si ha un fenomeno fortuito.

L' effetto farfalla

Un esempio molto semplice (mappa logistica):

$$x(t+1) = 4x(t)(1 - x(t)) \tag{3}$$

è possibile mostrare che tipicamente un piccolo errore raddoppia ad ogni passo

$$\delta x(t) \sim 2^t \delta x(0) \tag{4}$$

se si ha una (inevitabile) incertezza sulla condizione iniziale è praticamente impossibile conoscere lo stato del sistema dopo un certo tempo (che dipende dal sistema)

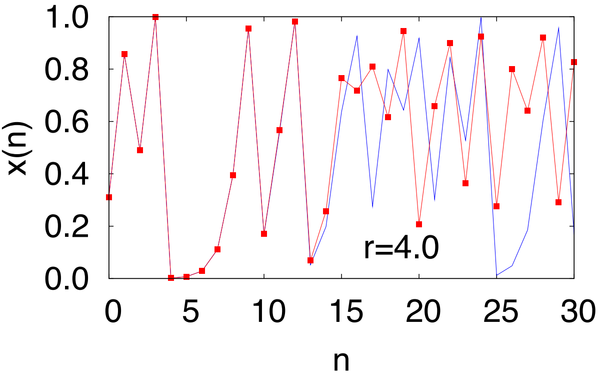
Esponente di Lyapunov

In un sistema deterministico caotico

$$|\delta \mathbf{x}(t)| \sim e^{\lambda t} |\delta \mathbf{x}(0)| \qquad (5)$$

quindi il sistema può essere predetto con una certa tolleranza Δ solo fino ad un tempo che dipende (poco) dall'incertezza iniziale e dall' **esponente di Lyapunov** $\lambda > 0$

$$T_p \sim \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\Delta}{|\delta \mathbf{x}(0)|} \right) \qquad (6)$$



Mappa logistica ($\lambda = \ln 2 \simeq 0.693$): due traiettorie a partire da condizioni iniziali molto vicine $|x(0) - x'(0)| = 4 \times 10^{-6}$, notare come solo dopo un tempo ~ 16 le due traiettorie diventino completamente diverse.

Il caos deterministico non è una patologia matematica

È ormai ben noto, a partire dai lavori degli anni 60 di **Lorenz**, **Hénon** , **Chirikov** etc, che i sistemi caotici sono la regola e non l'eccezione, e sono presenti in astronomia, ottica, oceanografia, sismologia etc.

Perchè le eclissi si prevedono in grande anticipo, mentre le previsioni del tempo sul prossimo fine settimana sono spesso errate?

Gli astronomi sono più bravi dei meteorologi?

Se si potremmo far fare le previsione meteo a gli astronomi...
Ma non è così, gli esperti di astronomia sono solo più "fortunati":
i fenomeni di cui trattano sono "poco caotici", cioè l'esponente di Lyapunov dei problemi astronomici è molti piccolo e quindi non è troppo difficile prevedere le eclissi. Al contrario il tempo caratteristico dell'atmosfera, cioè $1/\lambda$, è di qualche giorno, quindi niente previsioni a lungo termine.

Prevedere il futuro dalla conoscenza del passato

Non sempre le equazioni del fenomeni sono note.
Spesso non è neanche noto il **vettore di stato**, i.e. le variabili che descrivono Il fenomeno

L' idea di base: **dagli stessi antecedenti segue la stessa conseguenza**

Il metodo degli analoghi (nel caso più semplice in cui il vettore di stato sia noto)

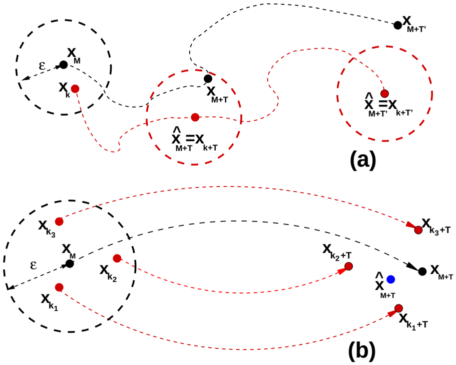
a- si conosce il passato i.e. una serie $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_M)$ ove $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}(j\Delta t)$
b- si vuole prevedere il futuro, i.e. $\mathbf{x}_{M+t}$
c- si guarda il passato e si cerca un analogo, cioè situazione simile ad oggi (tempo M), in pratica un vettore $\mathbf{x}_k$ con $k < M$ tale che $|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_M| < \epsilon$
d- si predice il futuro ai tempi $M + t > m$, $\rightarrow$

$$\mathbf{x}_{M+t} \simeq \mathbf{x}_{k+t}$$

Il metodo degli analoghi è la formalizzazione della massima biblica
Ciò che è stato sarà e ciò che si è fatto si rifarà

Se si trovano gli analoghi allora è possibile ricostruire (con una certa approssimazione) la legge di evoluzione, cioè una regola del tipo

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{G}[\mathbf{x}_t]$$



Schema del metodo degli analoghi per predire il futuro dal passato

Sembra tutto facile.... però non è ovvio che si trovi un analogo!

Il fatto che dagli stessi antecedenti seguano le stesse conseguenze è una dottrina metafisica. Nessuno può negarlo. Ma non è molto utile nel mondo in cui viviamo, ove non si verificano mai gli stessi antecedenti e nulla accade identico a se stesso due volte. Infatti, per quanto possiamo saperne, uno degli antecedenti potrebbe essere la data precisa e la località dell' evento, in questo caso la nostra esperienza sarebbe del tutto inutile. [...] L' assioma della fisica che ha, in un certo senso, la stessa natura è che da antecedenti simili seguono conseguenze simili

James Clerk Maxwell

Un tentativo di previsioni meteo con il metodo degli analoghi

Lorenz nel 1969 provò ad applicare il metodo per le previsioni meteo usando mappe atmosferiche (in pratica un vettore con circa mille dimensioni)

Il risultato fu disastroso: **non trovò analoghi**:
ci sono numerosi analoghi mediocri, ma nessuno veramente buono

Lorenz aveva riscoperto, dopo circa 100 anni, quanto intuito da J.C. Maxwell
non si verificano mai gli stessi antecedenti e nulla accade identico a se stesso due volte
la conclusione è valida anche sostituendo "stessi antecedenti" con "antecedenti simili"

Un passo indietro

Un problema di meccanica apparentemente lontano dalle previsioni

Teorema di Ricorrenza di Poincaré

In un qualunque sistema meccanico la cui evoluzione avviene in una regione limitata, dopo un certo tempo si ritorna (arbitrariamente) vicino alla condizione iniziale.

In effetti il teorema vale sotto ipotesi molto generali.

Storicamente il teorema ebbe una grande importanza per il problema della reversibilità. Boltzmann mostrò con argomenti probabilistici che in un sistema con N particelle per avere un ritorno vicino alla stato iniziale bisogna aspettare un tempo

$$T_R \sim \tau_0 C^N$$

ove τ_0 è un tempo caratteristico del sistema e $C > 1$, per un sistema macroscopico (N almeno 10^{20}) T_R è spaventosamente grande, molto maggiore dell'età dell'universo.

Un teorema facile ma importante

L'intuizione di Boltzmann è stata formalizzata nel

Lemma di Kac

In un sistema ergodico il tempo medio di ritorno $\langle \tau(A) \rangle$ in un insieme A è inversamente proporzionale alla probabilità $P(A)$ che il sistema durante la sua evoluzione si trovi in A:

$$\langle \tau(A) \rangle = \frac{\tau_0}{P(A)}$$

Consideriamo un insieme di dimensioni lineari $O(\epsilon)$ allora $P(A) \sim (\frac{\epsilon}{L})^D$ e quindi

$$\langle \tau(A) \rangle \sim \tau_0 \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^D$$

ove L è la variazione tipica della singola componente del vettore di stato e D è la **dimensione** dell'attrattore.

D indica il numero minimo di **gradi di libertà efficaci** del sistema.

Conseguenze (belle e brutte) del lemma di Kac

L' intuizione di Boltzmann è esatta $\rightarrow$ per corpi macroscopici, poiché $D \sim N \gg 1$, l'irreversibilità non è in contrasto con il teorema di Poincaré

Il lemma di Kac spiega l'insuccesso di Lorenz e le difficoltà delle previsioni meteo dalle serie storiche

Quanto lontano devo andare nel passato per trovare un analogo?
Il problema è del tutto equivalente a chiedersi il tempo di ricorrenza $\rightarrow$

Per trovare almeno un analogo con precisione ϵ si deve andare indietro un tempo ordine

$$\tau_0 \left(\frac{L}{\epsilon} \right)^D$$

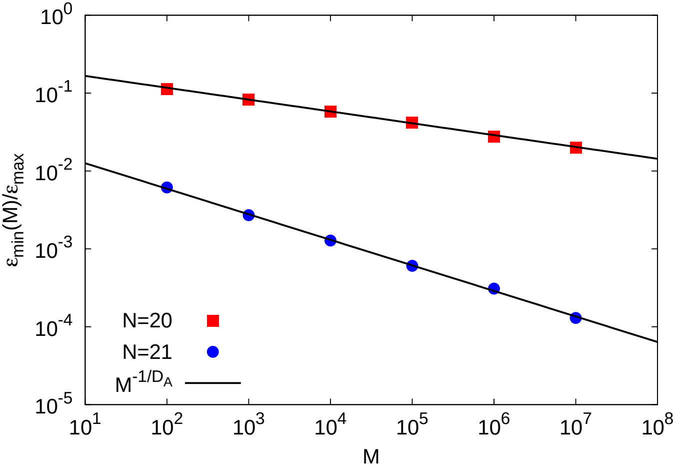
Brutte notizie....

Per trovare un analogo la lunghezza M della serie deve essere almeno dello stesso ordine del tempo medio ritorno

$$M_{min} \sim \frac{\tau_0}{\Delta t}\left(\frac{L}{\epsilon}\right)^D$$

Il povero Lorenz non poteva trovare un analogo, nell'atmosfera D è enorme

Anche con una precisione non altissima, diciamo il 5% cioè $L/\epsilon = 20$ abbiamo che non appena D è grande si deve andare indietro un tempo estremamente lungo, ad esempio se $D = 6$ servirebbero circa 6×10^7 tempi caratteristici, se $D = 8$ si arriva a 2×10^{10}.
Per una precisione dell' 1% i tempi diventano rispettivamente 10^{12} e 10^{16}.



Precisione percentuale di un analogo in funzione del numero di dati a disposizione.
Un esempio in due sistemi con $D \simeq 3.1$ (cerchi) e $D \simeq 6.6$ (quadrati).

Qualche buona notizia

Ci sono casi interessanti in cui il metodo funziona: le maree
Il motivo è il valore basso di D che varia da posto a posto ma è sempre tra 3 e 4 e quindi la serie non deve avere una lunghezza proibitiva.

Nei sistemi con struttura **multiscala**, cioè con variabili lente e veloci, può accadere che D dipende dalla risoluzione ϵ, questo a volte permette previsioni a risoluzione non altissima.

Ancora notizie mediamente brutte...

Quasi sempre il vettore di stato $\mathbf{x}$ non è noto, questo è il caso dei terremoti, si è costretti ad usare solo una serie temporale di una qualche variabile

$$u_1, u_2, ..., u_M$$

si deve affrontare il problema della **ricostruzione dello spazio delle fasi** a partire da $\{u_j\}$.

Questo è matematicamente possibile (teorema di **Takens** 1980), nella pratica rimane il problema della D: se è troppo grande (diciamo più di 5 o 6) allora i dati non bastano.

* I problemi non migliorano se si usa un modello stocastico, ad esempio catene di Markov, se gli stati sono troppi non si riesce a stimare le probabilità di transizione $\{p_{i \to j}\}$
* Nel problema delle previsioni usando serie storiche l'eventuale presenza del caos non è il problema principale: se D è troppo grande semplicemente non si trova nessun analogo e quindi il problema dell'incertezza non si pone.

Domande e perplessità

* Quasi sempre D non è piccolo
* In **finanza** (ed in altre scienze "pratiche") non è chiaro se
a] il sistema sia deterministico (quasi sicuramente non lo è)
b] quali siano le "variabili giuste"
c] il sistema sia stazionario

Come si può essere ottimisti nello sperare di costruire modelli e fare previsioni?

Dobbiamo essere realistici
Capire cosa non è possibile fare è uno degli aspetti più importanti della Scienza

Sapere che sai quando sai, e che non sai quando non sai, questa è la vera conoscenza (Confucio)

* Esiste una (nefasta) corrente di pensiero, che purtroppo prende sempre più piede, seconda la quale *visto che siamo nell'era dei dati in abbondanza si può fare a meno delle teorie, basta usare i dati*

Una grande ingenuità ...... Kac insegna che l'esponeziale non perdona!!

Fare previsioni è difficile, specialmente del futuro

(Mark Tawain)

Richardson il grande visionario

Capì che i metodi "empirici" per le previsioni meteo in uso all'inizio del XX secolo ($\pm$ parenti del metodo degli analoghi) dovevano essere superati.

Richardson durante la prima guerra mondiale guidava (disarmato in quanto pacifista) le autoambulanze sul fronte francese, tra un turno e l'altro concepì un'idea visionaria per le previsioni meteorologiche: utilizzare le equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi e della termodinamica per determinare lo stato futuro dell' atmosfera. Il manoscritto del libro che scrisse tra un turno e l'altro al fronte, *Weather Prediction by Numerical Process*, andò perduto durante la battaglia della Champagne nell' aprile del 1917, venne fortunosamente ritrovato mesi dopo sotto un mucchio di carbone.

Per la realizzazione del sogno di Richardson si dovrà aspettare fino agli anni 50 con due "ingredienti" assolutamente non banali:
a la messa a punto di equazioni efficaci
b computer per i calcoli numerici

Qualche Ref sull'argomento

* L.F. Richardson *Weather Prediction by Numerical Process* (Cambridge University Press, 1922)
* E.N. Lorenz *Three approaches to atmospheric predictability* Bull. Am. Met. Soc. **50**, 345 (1969)
* E.N. Lorenz *The essence of chaos* (UCL Press, 1995)
* A.S. Weigend and N.A. Gershenfeld (Editors) *Time series prediction* (Addison-Wesley Pub., 1994)
* H. Kantz and T. Schreiber *Nonlinear time series analysis* (Cambridge University Press, 1997)
* M. Cencini , F.Cecconi and A.V. *Chaos: from simple models to complex systems* (World Scientific Pub., 2009)
* F.Cecconi, M. Cencini, M. Falcioni and A.V. *The prediction of future from the past: an old problem from a modern perspective* Am. J. Phys. **80**, 1001 (2012)