Gianni Battimelli

# A random talk in history

with an appendix on nonlinear correlations
in a two-body system with memories

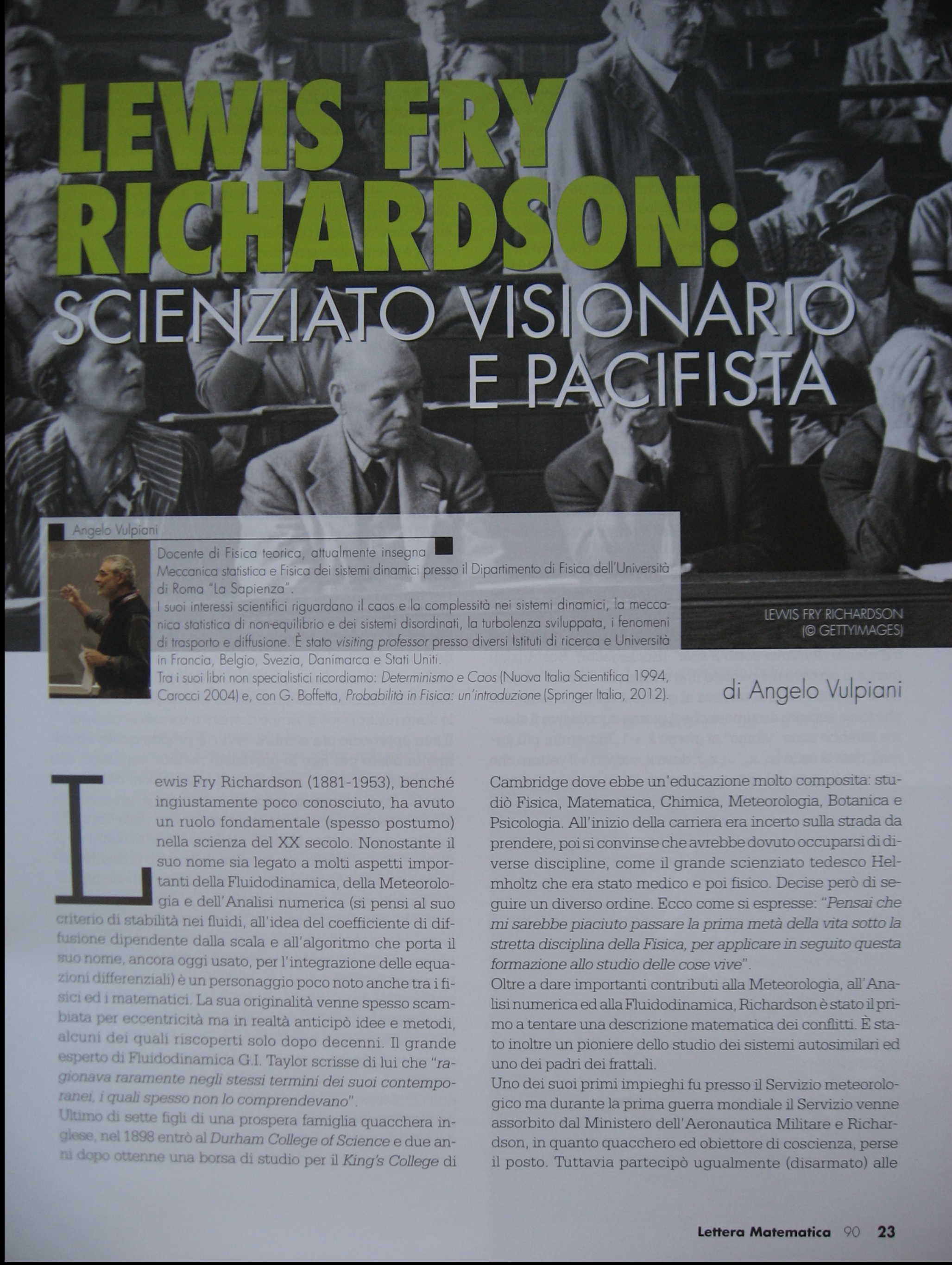
Boltzmann 1877:

“One therefore cannot prove that, whatever may be the positions and the velocities of the spheres at the beginning, the distribution must become uniform after a long time; rather one can only prove that infinitely many more initial states will lead to a uniform one after a definite length of time than to a non-uniform one.”

“… it follows from the theorem itself that, since there are infinitely many more uniform than non-uniform distributions, the number of states which lead to uniform distributions after a certain time $t_1$ is much greater than the number that leads to non-uniform ones…”

L. F. Richardson

L. F. Richardson



# LEWIS FRY RICHARDSON: SCIENZIATO VISIONARIO E PACIFISTA

LEWIS FRY RICHARDSON
(© GETTYIMAGES)

Angelo Vulpiani

Docente di Fisica teorica, attualmente insegna Meccanica statistica e Fisica dei sistemi dinamici presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Roma "La Sapienza".
I suoi interessi scientifici riguardano il caos e la complessità nei sistemi dinamici, la meccanica statistica di non-equilibrio e dei sistemi disordinati, la turbolenza sviluppata, i fenomeni di trasporto e diffusione. È stato *visiting professor* presso diversi Istituti di ricerca e Università in Francia, Belgio, Svezia, Danimarca e Stati Uniti.
Tra i suoi libri non specialistici ricordiamo: *Determinismo e Caos* (Nuova Italia Scientifica 1994, Carocci 2004) e, con G. Boffetta, *Probabilità in Fisica: un'introduzione* (Springer Italia, 2012).

di Angelo Vulpiani

Lewis Fry Richardson (1881-1953), benché ingiustamente poco conosciuto, ha avuto un ruolo fondamentale (spesso postumo) nella scienza del XX secolo. Nonostante il suo nome sia legato a molti aspetti importanti della Fluidodinamica, della Meteorologia e dell'Analisi numerica (si pensi al suo criterio di stabilità nei fluidi, all'idea del coefficiente di diffusione dipendente dalla scala e all'algoritmo che porta il suo nome, ancora oggi usato, per l'integrazione delle equazioni differenziali) è un personaggio poco noto anche tra i fisici ed i matematici. La sua originalità venne spesso scambiata per eccentricità ma in realtà anticipò idee e metodi, alcuni dei quali riscoperti solo dopo decenni. Il grande esperto di Fluidodinamica G.I. Taylor scrisse di lui che "*ragionava raramente negli stessi termini dei suoi contemporanei, i quali spesso non lo comprendevano*".
Ultimo di sette figli di una prospera famiglia quacchera inglese, nel 1898 entrò al *Durham College of Science* e due anni dopo ottenne una borsa di studio per il *King's College* di Cambridge dove ebbe un'educazione molto composita: studiò Fisica, Matematica, Chimica, Meteorologia, Botanica e Psicologia. All'inizio della carriera era incerto sulla strada da prendere, poi si convinse che avrebbe dovuto occuparsi di diverse discipline, come il grande scienziato tedesco Helmholtz che era stato medico e poi fisico. Decise però di seguire un diverso ordine. Ecco come si espresse: "*Pensai che mi sarebbe piaciuto passare la prima metà della vita sotto la stretta disciplina della Fisica, per applicare in seguito questa formazione allo studio delle cose vive*".
Oltre a dare importanti contributi alla Meteorologia, all'Analisi numerica ed alla Fluidodinamica, Richardson è stato il primo a tentare una descrizione matematica dei conflitti. È stato inoltre un pioniere dello studio dei sistemi autosimilari ed uno dei padri dei frattali.
Uno dei suoi primi impieghi fu presso il Servizio meteorologico ma durante la prima guerra mondiale il Servizio venne assorbito dal Ministero dell'Aeronautica Militare e Richardson, in quanto quacchero ed obiettore di coscienza, perse il posto. Tuttavia partecipò ugualmente (disarmato) alle


A. N. Kolmogorov


L. Onsager

W. Heisenberg

C. F. von Weizsäcker

Kolmogorov, Heisenberg, von Weizsäcker, Onsager:
un caso di scoperta simultanea

Giovanni Battimelli[+], Angelo Vulpiani[+]

[+] Istituto di Fisica "G. Marconi" - Università di Roma

Nella prima metà degli anni quaranta, indipendentemente gli uni dagli altri, il matematico russo A.N.Kolmogorov, i fisici tedeschi W.Heisenberg e C. von Weizsäcker, e il chimico fisico L.Onsager negli Stati Uniti, propongono quello che sostanzialmente è un identico modello teorico per trattare il problema della turbolenza sviluppata, giungendo, sia pure attraverso formulazioni e con linguaggi e tecniche diversi, agli stessi risultati fondamentali. Riassunti collettivamente, nella letteratura successiva, sotto l'etichetta di "teoria di Kolmogorov", questi contributi sono interessanti da analizzare separatamente e nelle loro caratteristiche comuni in quanto rappresentano un significativo punto di svolta nel complicato percorso, a cavallo tra settori disciplinari diversi, delle ricerche teoriche sulla turbolenza.

1. Prime a comparire sono tre brevi note di Kolmogorov sugli Atti della Accademia delle Scienze sovietica (1), relative alla statistica delle strutture a piccola scala nel caso di turbolenza isotropa ed omogenea. Indicativa del tipo di approccio al problema è già l'apertura del primo lavoro: "Considerando la turbolenza è naturale trattare le componenti della velocità.... come variabili aleatorie nel senso della teoria della probabilità". E' appena il caso di notare che un approccio del genere poteva in realtà apparire "naturale" solo ad un probabilista come Kolmogorov. Il giudizio liquidatorio espresso da von Kármán ancora nel 1937 nei confronti dei tentativi di servirsi della teoria della probabilità nell'attaccare il problema della turbolenza ("... Gebelein ha tentato di risolvere il problema guardandolo dallo alto della torre della teoria generale della probabilità; credo che questa sia una torre troppo alta per permettere di vedere i semplici fatti" (2)) è abbastanza indicativo di quanto naturale potesse apparire un simile linguaggio ai matematici applicati coinvolti nel campo.

Comunque, sfrondato dal linguaggio estremamente formalizzato, il lavoro di Kolmogorov rivela una struttura piuttosto semplice che si può agevolmente riassumere in breve. L'individuazione dei meccanismi fisici fondamentali è contenuta nelle tre ipotesi che sono all'origine della trattazione:

a) la turbolenza è omogenea e isotropa a piccola scala
b) a piccola scala le proprietà statistiche dipendono solo da $\nu$ (viscosità cinematica) e da $\varepsilon$ (energia dissipata)
c) nel range inerziale ("scale piccole ma non troppo") le proprietà statistiche dipendono solo da $\varepsilon$

Queste tre ipotesi permettono di ricavare le quantità statistiche rilevanti grazie al semplice uso dell'analisi dimensionale. Dalla ipotesi b) si ha che l'unica lunghezza e l'unica velocità significative a piccola scala sono $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ (lunghezza di K.) e $v = (\nu\varepsilon)^{1/4}$ (velocità di K.); $\eta$ e v rappresentano fisicamente la lunghezza d'onda alla quale gli effetti viscosi diventano predominanti e la velocità tipica associata a vortici di scala $\eta$.



Se si cerca allora una espressione per le funzioni di correlazione, si ha sempre dalla ip. b) che, per $r \ll L$ (L è la lunghezza che definisce le grandi scale)

$$\langle ( u(0) - u(r) )^2 \rangle = v^2 \beta (r/\eta)$$

dove $\beta$ è una funzione universale. Essa è facilmente calcolabile nel range inerziale ( $\eta \ll r \ll L$) con l'aiuto dell'ipotesi c) ottenendo

$$\langle ( u(0) - u(r) )^2 \rangle \propto (\varepsilon r)^{2/3}$$

La stessa procedura può essere facilmente ripetuta per lo spettro di energia E(k) e si ottiene

$$E(k) \propto \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \qquad \text{per } 1/L \ll k \ll 1/\eta$$

E' interessante rilevare che questo particolare risultato, noto nella letteratura come "legge 5/3" o "legge di Kolmogorov", non compare esplicitamente in questi lavori, anche se ne è conseguenza abbastanza immediata.

E' significativo nel lavoro di Kolmogorov il modo in cui esso è strutturato, tipicamente matematico-deduttivo: si parte da alcune ipotesi e si procede alla deduzione formale delle conclusioni (il calcolo delle funzioni di correlazione). E' da notare come la giustificazione in base a considerazioni fenomenologiche delle ipotesi sia confinata in una nota a piè di pagina, con un atteggiamento ben diverso da quello che avrebbe avuto un ingegnere.
D'altra parte è facile rendersi conto del fatto che, al di là del linguaggio formalmente matematizzante e probabilista, Kolmogorov non introduce nè nuove tecniche (tutta la deduzione dei risultati si fonda essenzialmente sull'uso dell'analisi dimensionale, pane quotidiano per ingegneri e matematici applicati) nè idee fenomenologiche particolarmente originali. Si prenda per esempio la descrizione del bilancio energetico nella turbolenza: "Dal punto di vista energetico è naturale immaginare il processo dell'agitazione turbolenta nel modo seguente: le pulsazioni del primo ordine assorbono l'energia del moto e la trasferiscono successivamente a pulsazioni di ordini più elevati. L'energia delle pulsazioni più piccole è dispersa in energia termica a causa della viscosità". Questa descrizione è praticamente identica a quella suggerita circa venti anni prima dal meteorologo inglese L.F.Richardson in una sorta di poesia lungamente dimenticata e recentemente ricomparsa nella letteratura sulla turbolenza: "Big whorls have little whorls, which feed on their velocity, and little whorls have lesser whorls, and so on to viscosity (in the molecular sense)" (3).

2. Negli ultimi mesi del 1945, durante la loro detenzione in un campo per scienziati tedeschi nei pressi di Cambridge in Inghilterra, Heisenberg e von Weizsäcker elaborano in stretta connessione una teoria della turbolenza a piccola scala, diversa da quella di Kolmogorov, ma che giunge alle stesse conclusioni fisiche. La loro teoria verrà pubblicata solo nel 1948 (4) in due articoli consecutivi, quando ormai in Occidente è nota la teoria di Kolmogorov (di cui essi nel 1945 non erano a conoscenza) soprattutto per opera di G.K.Batchelor (5). I due lavori riportano praticamente la stessa teoria, pur se presentata in modo diverso: la trattazione di Heisenberg è più formale ed analitica, mentre quella di von Weizsäcker è più fenomenologica e introduce esplicite connessioni con problemi di astrofisica.

Analizziamo brevemente la teoria: la prima equazione della gerarchia di Reynolds nello spazio k per la turbolenza isotropa ed omogenea è

$$\partial_t E(k) = -2\nu k^2 E(k) + T(k)$$

dove $T(k)$ proviene dalla parte non lineare dell'equazione di Navier-Stokes. $T(k)$ contiene contributi dovuti alle funzioni di correlazione tripla delle armoniche del campo di velocità. Il problema è come scrivere $T(k)$ in termini di $E(k)$ in modo da 'chiudere' l'equazione: problema del tutto analogo a quello che si era posto a L.Prandtl nel 1925 nel tentativo di costruire una espressione per gli sforzi di Reynolds legata alle proprietà del moto medio, e che Prandtl aveva risolto con l'introduzione della "lunghezza di mescolamento" (6). Procedendo in modo analogo a quanto fatto da Prandtl l'idea di Heisenberg - von Weizsäcker è di porre

$$\int_0^k T(k')dk' = -2\,\nu_T(k) \int_0^k k'^2 E(k')dk'$$

dove $\nu_T(k)$ rappresenta una "viscosità turbolenta". L'analogia con Prandtl (modellare il trasferimento turbolento di energia in termini dissipativi: i piccoli vortici assorbono energia dai grandi) impone che $\nu_T(k)$ deve avere contributi dai numeri d'onda maggiori di k; da questo e dall'analisi dimensionale segue

$$\nu_T(k) = C\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k')}{k'^3}}\, dk'$$

Combinando questi risultati si ottiene, per $k \gg 1/L$

$$-\partial_t \int_0^k E(k')dk' \approx \varepsilon = 2\left(\nu + C\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k')}{k'^3}}\, dk'\right) \int_0^k k'^2 E(k')dk'$$

La soluzione dell'equazione dà, nel range inerziale

$$E(k) \sim k^{-5/3}$$

Notiamo come anche nel caso della teoria di Heisenberg-von Weizsäcker non ci siano novità tecniche: gli ingredienti base sono infatti l'idea di viscosità turbolenta, ripresa da Prandtl, e ancora una volta l'analisi dimensionale.

3. Il contributo di Onsager è contenuto in un manoscritto inviato a C. Lin (7), che lavorava allora al Guggenheim Aeronautical Laboratory di Caltech diretto da T. von Kármán, nel giugno del 1945, e in una relazione del novembre dello stesso anno di cui è pubblicato uno smilzo abstract sulla Physical Review (8). Un successivo lavoro del 1949 (9) è meno interessante perchè nel frattempo Onsager era venuto a conoscenza dei contributi di Kolmogorov e dei tedeschi, e la presentazione delle sue idee risente dell'influsso delle teorie degli altri tre personaggi della vicenda. L'abstract del 1945 è comunque sufficiente a capire il tipo di proposta e la stretta parentela con le idee di Kolmogorov: "... non è stato sottolineato fino ad ora che la suddivisione dell'energia deve essere un processo a gradini... Per un simile meccanismo a cascata la parte di densità di energia associata a grandi numeri d'onda dovrebbe dipendere solo dal tasso di dissipazione totale $\varepsilon$ . Allora considerazioni dimensionali richiedono che l'energia per componente di numero d'onda k sia uguale, a parte un fattore universale, a $\varepsilon^{2/3}k^{-11/3}$". Dato che nello spettro $E(k)$ si hanno $4\pi k^2$ contributi per singola armonica, questa è evidentemente, di nuovo, la "legge 5/3".

Un episodio piuttosto divertente è utile a dare la misura del carattere non usuale del contributo di Onsager (e degli altri simili) per gli esperti di dinamica dei fluidi di quegli anni. Oltre che a Lin, Onsager aveva inviato



una sorta di sommario delle proprie idee a von Kármán, allora a Parigi in qualità di consulente scientifico della U.S. Air Force, e quest'ultimo aveva scritto in proposito a Lin: "Ho ricevuto una lettera e una specie di manoscritto da un certo signor Lars Onsager. Trovo la sua lettera alquanto svitata ("screwy"), perciò sarei contento di sapere da te se vale la pena di leggere l'articolo. Forse potresti indicarmi in poche righe qual'è l'idea, ammesso che ce ne sia una" (10).

4. Questa notevole gaffe, di per sè, dimostra solo che all'epoca von Kármán era in tutt'altre faccende affaccendato e che non prestò alcuna attenzione al manoscritto di Onsager; comunque, già il fatto che quest'ultimo gli fosse del tutto sconosciuto dà un'idea della distanza che separava i rispettivi ambienti scientifici. Ci sembra inoltre che sia legittimo prendere la reazione di von Kármán davanti alla proposta di Onsager come emblematica del tipo di atteggiamento che caratterizza la comunità degli scienziati attivi in quel momento nelle ricerche sulla turbolenza nei confronti di queste nuove teorie. Ciò che non può non disorientare i matematici applicati di quegli anni non sono tanto le tecniche e le idee principali utilizzate in questi lavori (abbiamo visto come si tratti essenzialmente di ingredienti, e di modi di combinarli, familiari da tempo agli esperti del settore) quanto il modo di porre il problema e i linguaggi con cui lo si tratta, tipici di tradizioni scientifiche diverse. E' vero che il concetto di turbolenza isotropa, l'uso delle funzioni di correlazione per definirne le proprietà statistiche, e la tecnica della trasformata di Fourier per la rappresentazione spettrale, erano state introdotte, e rapidamente recepite dai ricercatori del settore, già nei fondamentali lavori di G. Taylor del 1935 e del 1938 (11), ma in quel caso Taylor stesso si era preoccupato di mostrare l'immediata rilevanza del suo approccio sul piano applicativo e tecnologico, e solo grazie a ciò il nuovo punto di vista era stato accettato (12).
La caratteristica comune dei lavori di cui ci stiamo occupando è, al contrario, quella di non mostrare traccia alcuna di intenti applicativi, e di affrontare il problema per il suo intrinseco interesse di carattere fondamentale. E' un approccio che potrebbe essere definito tipico da lavori di fisica teorica. Ed è proprio la fisica teorica che definisce uno stile di lavoro e segue una propria strada che sempre più si allontana dal percorso (metodo logico, tecnico, istituzionale) della matematica applicata ai problemi di meccanica classica, che si costituisce anch'essa in disciplina autonoma verso i primi anni venti. La "scoperta simultanea" è interessante perchè rappresenta l'irruzione, sulla scena delle ricerche sulla turbolenza, di nuovi settori disciplinari; o forse meglio, il ritorno di interesse e la ripresa in esame, da parte di alcuni settori di ricerca "pura", di ambiti di indagine che per lungo tempo erano stati espunti dal novero dei problemi di cui occuparsi, per essere destinati all'attenzione di altre competenze. Non deve stupire che l'apparizione sulla scena di nuove curiosità, che si esprimono con nuovi linguaggi e pongono nuove domande, produca incomprensione tra le vecchie competenze, o, se non altro, crei disorientamento.

5. Gli itinerari attraverso cui i nostri quattro personaggi arrivano alla formulazione della loro teoria non sono solo indipendenti, ma anche molto diversi, così come diversi sono i rispettivi retroterra scientifici e istituzionali.

Kolmogorov viene dalla grande tradizione della matematica russa, e la presentazione dei suoi articoli svela chiaramente la sua origine di caposcuola di teoria della probabilità (del 1933 è il suo testo in cui si danno i fondamenti dell'approccio assiomatico (13)). Occorrerebbe qui, per meglio comprendere il suo contributo alla nostra vicenda, un'indagine accurata sulle particolari caratteristiche che assume, nell'Unione Sovietica tra le due guerre, il rapporto tra matematica pura e matematica applicata. Heisenberg riporta nel suo contributo la competenza specifica acquisita lavorando da giovane sotto la direzione di Sommerfeld alla tesi di dottorato (14), che verteva su problemi di stabilità e transizione alla turbolenza in dinamica dei fluidi, oltre ovviamente alla familiarità con trasformate di Fourier e spazi k che gli viene dalla meccanica quantistica. Von Weizsäcker, fisico teorico "di seconda generazione" dopo la rivoluzione quantistica, approda allo studio della teoria della turbolenza perchè indotto a riflettervi dalla natura del problema di astrofisica con cui è alle prese nei primi anni quaranta, l'elaborazione di una teoria dell'origine del sistema solare basata sull'ipotesi di una condensazione dei pianeti a partire da una nebulosa originaria (15). La descrizione dell'evoluzione di un simile oggetto è per l'appunto un problema di dinamica di un fluido viscoso ad alti numeri di Reynolds, e i risultati ottenuti nella collaborazione con Heisenberg indussero von Weizsäcker ad apportare modifiche al modello originario (16). Onsager, infine, è un chimico fisico: il suo approdo alla teoria della turbolenza avviene lungo un percorso che tocca problemi di termodinamica di non equilibrio, di fenomeni non lineari, di meccanica statistica dei fenomeni critici; la soluzione esatta del modello di Ising bidimensionale (17) precede di un anno circa il lavoro sulla turbolenza.

Giungere ad una ricostruzione dettagliata di questi differenti percorsi richiede una approfondita indagine storica che è ancora tutta da fare. In queste note si è semplicemente grattata la superficie del problema; abbastanza comunque, crediamo, da mostrarne lo spessore e l'interesse.

NOTE

(1) A.N.Kolmogorov, "The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers", Compt. Rend. Acad. Sc. URSS 30 (1941), pp. 301-305
A.N.Kolmogorov, "On Degeneration of Isotropic Turbulence in an Incompressible Viscous Liquid", Compt. Rend. Acad. Sc. URSS 31 (1941), pp. 538-540
A.N.Kolmogorov, "Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence", Compt. Rend. Acad. Sc. URSS 32 (1941), pp. 16-18

(2) T. von Kármán, "Turbulence", Aeronautical Reprints 89 (1937), The Royal Aeronautical Society, London. Hans Gebelein, che seguiva i lavori di teoria della probabilità di Kolmogorov, aveva tentato con scarso successo di coniugare approccio probabilistico e idrodinamica in H. Gebelein, "Turbulenz; physikalische Statistik und Hydrodynamik", Berlin 1935



(3) "I grandi vortici hanno vortici piccoli, che si mangiano la loro velocità, e i piccoli vortici hanno vortici più piccoli, e così via fino alla viscosità (in senso molecolare)". La "poesia" si trova a pag. 66 di L.F.Richardson, "Weather prediction by numerical process", Cambridge 1922.

(4) C.F.von Weizsäcker, "Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynoldschen Zahlen", Zeit. f. Phys. 124 (1948), pp. 614-627
W. Heisenberg, "Zur statistischen Theorie der Turbulenz", Zeit. f. Phys. 124 (1948), pp. 628-657

(5) G.K.Batchelor, "Double Velocity Correlation Function in Turbulent Motion", Nature 158 (1946), pp. 883-884; comunicazione al Turbulence Symposium, VI International Congress for Applied Mechanics, Paris, 22-29 settembre 1946
G.K.Batchelor, "Kolmogoroff's Theory of Locally Isotropic Turbulence", Proc. Cambridge Phil. Soc. 43 (1947), pp. 533-559

(6) L. Prandtl, "Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz", Zeit. Angew. Math. Mech. 5 (1925), pp. 136-139

(7) L. Onsager a C. Lin, giugno 1945, T. von Kármán Papers, National Air and Space Museum, Smithsonian Institution, Washington, D.C. (copia in microfiches dell'originale depositato presso gli Archivi del California Institute of Technology, Pasadena), Box 18, cartella 22

(8) L. Onsager, "The Distribution of Energy in Turbulence", Phys. Rev. 68 (1945), p. 286; Abstract di una comunicazione presentata al Meeting della Metropolitan Section of the American Physical Society, Columbia University, New York, 9 e 10 novembre 1945

(9) L. Onsager, "Statistical Hydrodynamics", Suppl. Vol. VI, Ser. IX del Nuovo Cimento (1949), pp. 279-287

(10) T. von Kármán a C. Lin, 23 agosto 1945, von Kármán Papers cit., Box 18, cartella 22

(11) G.I.Taylor, "Statistical Theory of Turbulence", Proc. Roy. Soc. London, A, 151 (1935), pp. 421-478
G.I.Taylor, "The Spectrum of Turbulence", Proc. Roy. Soc. London, A, 164 (1938), pp. 476-490

(12) Per una discussione del contributo di Taylor vedi G. Battimelli, "Teorie statistiche della turbolenza: il lavoro di Taylor del 1935", Atti del Secondo Congresso Nazionale di Storia della Fisica, Pavia, ottobre 1981

(13) A.N.Kolmogorov, "Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung", Berlin 1933

(14) W. Heisenberg, "Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitströmen", Ann. Phys. 74 (1924), pp. 577-627

(15) C.F.von Weizsäcker, "Über die Entstehung des Planetensystems", Zeit. f. Astroph. 22 (1944), pp. 319-355

(16) C.F.von Weizsäcker, "The evolution of galaxies and stars", Astroph. Jour. 114 (1951), pp. 165-186

(17) L. Onsager, "Crystal Statistics. I. A Two-Dimensional Model with an Order-Disorder Transition", Phys. Rev. ser. 2, 65 (1944), 117


PALERMO
tv
GIORNALE DI SICILIA


PALERMO tv
GIORNALE DI SICILIA