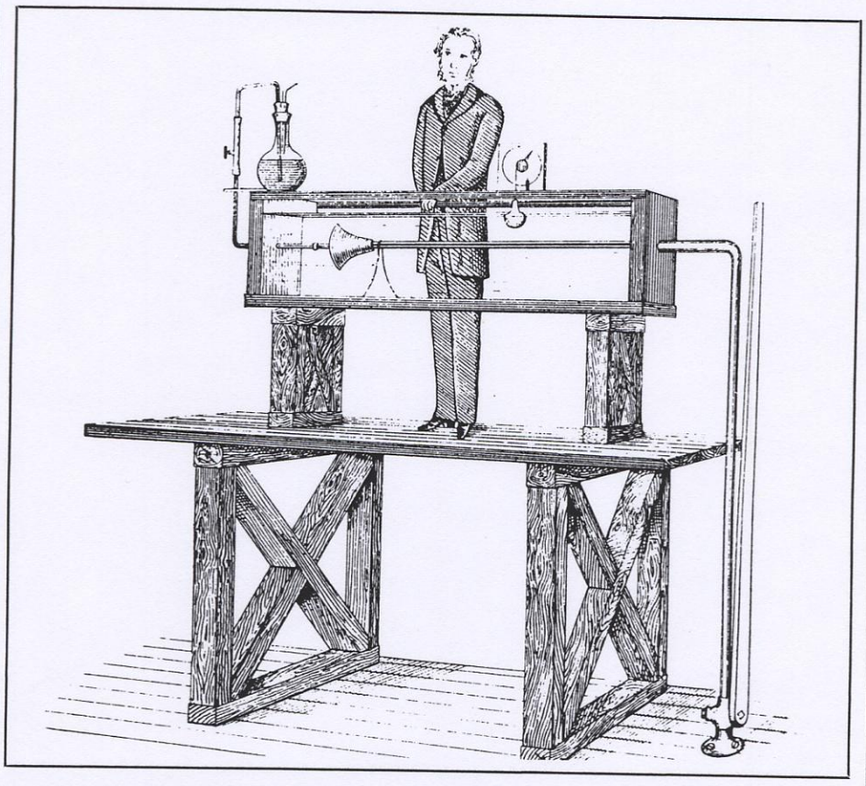
Gianni Battimelli e Angelo Vulpiani

La turbolenza, buco nero della fisica classica

«Abbiamo una conoscenza peggiore di ciò che accade in un millimetro cubo di aria che non di ciò che accade dentro un nucleo atomico»



L'assistente e l'apparato sperimentale di O. Reynolds. Variando la velocità di scorrimento dell'acqua nel tubo centrale, e visualizzando il moto attraverso l'introduzione di un liquido colorato prelevato dalla bottiglia in alto, Reynolds mostrava con questo esperimento la transizione dal regime laminare a quello turbolento

È abbastanza difficile dare una definizione precisa della turbolenza, in particolare da una decina d'anni a questa parte, da quando cioè «turbolenza» è diventato un termine usato con molta frequenza per indicare una gran varietà di cose. Per evitare complicazioni non necessarie diciamo subito che intendiamo parlare di turbolenza idrodinamica «vecchio tipo» (che ora nella letteratura è indicata col termine di turbolenza completamente sviluppata).

Vediamo con un esempio di vita quotidiana di cosa si tratta e perché è così importante la sua comprensione. Ognuno di noi ha osservato che aprendo solo un po' il rubinetto della cucina l'acqua scende in modo regolare e la forma del filetto fluido rimane inalterata; questo è quello che viene chiamato moto *laminare*. Aumentando la portata del rubinetto (cioè aprendolo di più) si osserva un cambiamento qualitativo del moto del fluido, che ora non è più regolare, ma abbastanza complicato ed in continuo cambiamento. La forma del filetto fluido, per esempio, non è più costante ma cambia nel tempo continuamente ed in modo molto irregolare. Questo tipo di moto viene detto *turbolento*, ed è caratterizzato da variazioni complicate e fortemente irregolari di tutte le quantità in gioco; ad esempio, un tipi-

Un po' di fisica per capirne di più

L'evoluzione del campo di velocità di un fluido (liquido o gas) incompressibile (in pratica si può considerare un fluido come incompressibile se le velocità in gioco sono piccole rispetto alla velocità del suono nel fluido stesso) è regolata dalle equazioni di Navier-Stokes:

$$\partial_t u_i + \sum_{j=1}^{3} u_j \partial_j u_i = -\frac{1}{\varrho} \partial_i p + \nu \Delta u_i + f_i$$

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{3} \partial_j u_j = 0$$

dove u_1, u_2, u_3 sono le tre componenti della velocità nel punto (x, y, z) all'istante t, ∂_i indica la derivata parziale rispetto ad x (per i = 1), ad y (per i = 2), o a z (per i = 3), ϱ è la densità, p la pressione,

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \partial_{ii}^2,$$

ν è la viscosità cinematica e f_i rappresenta l'eventuale densità di forza esterna nell'i-ma direzione.

Le equazioni (1), per quanto apparentemente complesse, sono sostanzialmente le equazioni di Newton per la dinamica (cioè la famosa forza = massa × accelerazione) scritte per un mezzo continuo incompressibile e tenendo conto dell'attrito tra strati di fluido che scorrono con velocità diversa. Una importantissima proprietà delle equazioni di Navier-Stokes è che esse sono *non lineari:* se cioè si hanno due soluzioni di tali equazioni, la loro somma, in generale, non è affatto soluzione. Si noti che un termine non lineare nell'equazione (1) è dato da

$$\sum_j u_j \partial_j u_i,$$

mentre $\nu \Delta u_i$ è un termine lineare. Abbiamo quindi, se U e L indicano la velocità e la lunghezza tipica, che il termine non lineare vale (come ordine di grandezza) U^2/L, mentre per quello lineare si ha $\nu U/L^2$; il rapporto tra questi due termini è proprio il numero di Reynolds. Il numero di Reynolds $R = UL/\nu$, oltre ad avere il significato intuitivo precedentemente visto, è *l'unico parametro significativo una volta fissata la geometria del sistema.*

Scrivendo

$$(u_1, u_2, u_3) = U\,(u_1', u_2', u_3')$$

$$(x, y, z) = L\,(x', y', z')$$

$$t = \frac{L}{U} t',$$

si ha per le nuove variabili adimensionali con apice la stessa equazione (1) con ν sostituita da $1/R$ e le condizioni al bordo indipendenti da R (in quanto la geometria è fissata e tutto è adimensionalizzato).

È abbastanza facile rendersi conto che per piccoli R l'equazione (1) dà un comportamento «tranquillo»: infatti in tale limite il termine non lineare è trascurabile, e l'equazione di Navier-Stokes è «vicina» all'equazione per la diffusione del calore che fornisce un puro rilassamento. Per grandi R il termine dominante è invece

$$\sum_j u_j \partial_j u_i,$$

che, se si scrivono le equazioni (1) in termini delle trasformate di Fourier di (u_1, u_2, u_3), accoppia le armoniche di ogni lunghezza d'onda; è abbastanza ragionevole allora aspettarsi un comportamento a cui contribuiscono molte scale caratteristiche, e quindi un alto grado di irregolarità.

Abbiamo pertanto che per alti numeri di Reynolds molte armoniche contribuiscono al moto turbolento che dunque, a causa dell'alto numero di gradi di libertà in gioco e della forte sensibilità alle condizioni iniziali, deve necessariamente essere trattato con tecniche e metodi statistici.

Sfortunatamente non è possibile usare tutto l'armamentario teorico della meccanica statistica di equilibrio in quanto la turbolenza è un fenomeno dissipativo, e un eventuale stato stazionario può realizzarsi solo grazie ad un continuo input di energia dall'esterno.

La costruzione di una teoria formale della turbolenza deve necessariamente scontrarsi con il *problema della chiusura,* strettamente legato alla struttura non lineare dell'equazione di Navier-Stokes.

Per dare un'idea di cosa si tratta consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = -\alpha x - \gamma x^2$$

e proviamo a costruirci una «meccanica statistica» dell'equazione (2) (in effetti essa è esattamente risolubile, ma questo è solo un esempio). Immaginiamo di avere all'istante iniziale tutti i momenti di x, cioè i $c_i(o) = \langle x^i(o) \rangle$ (i = 1, 2, ...) dove $\langle\ \rangle$ indica la media, e chiediamoci quali saranno i valori dei c_i all'istante $t > o$. Proviamo a costruirci l'equazione per $c_1(t)$; essa è

$$\frac{d}{dt} c_1(t) = -\alpha c_1 - \gamma c_2(t)$$

Per risolverla abbiamo bisogno di un'altra equazione per $c_2(t)$, che è

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} c_2(t) = -\alpha c_2(t) - \gamma c_3(t)$$

A questo punto se scriviamo l'equazione per $c_3(t)$ comparirà $c_4(t)$, e così via.

Si avrà quindi sempre una situazione con un numero di variabili maggiore di quello delle equazioni, che non potrà essere risolta se non con opportune ipotesi ed approssimazioni. Questo problema della chiusura è tipico di ogni situazione non lineare; una cosa analoga si incontra ad esempio nella teoria cinetica con la gerarchia di Bogoliubov.

Anche l'approccio numerico presenta difficoltà non banali. Il numero di equazioni da integrare al computer è enorme; per rendersene conto si ricordi che la lunghezza di Kolmogorov η è proporzionale a $R^{-3/4}$. Se si vuole avere una buona risoluzione spaziale si deve arrivare a risolvere almeno la lunghezza di Kolmogorov, quindi il numero di equazioni da considerare è dell'ordine di $R^{9/4}$.

Inoltre, poiché il tempo tipico τ_η su cui evolvono i vortici di dimensione η è proporzionale a $R^{-1/2}$, si ha che il passo di integrazione Δt da usare per l'integrazione numerica deve essere, se si vogliono dei risultati fisicamente rilevanti, minore di τ_η.

Abbiamo quindi che si devono integrare N equazioni molto complicate con un passo di integrazione Δt (con N proporzionale a $R^{9/4}$, Δt proporzionale a $R^{-1/2}$), il che comporta, come è facile capire, che la memoria e il tempo macchina necessari per una simulazione un minimo realistica ad alti numeri di Reynolds (diciamo 10^6) è praticamente proibitiva.

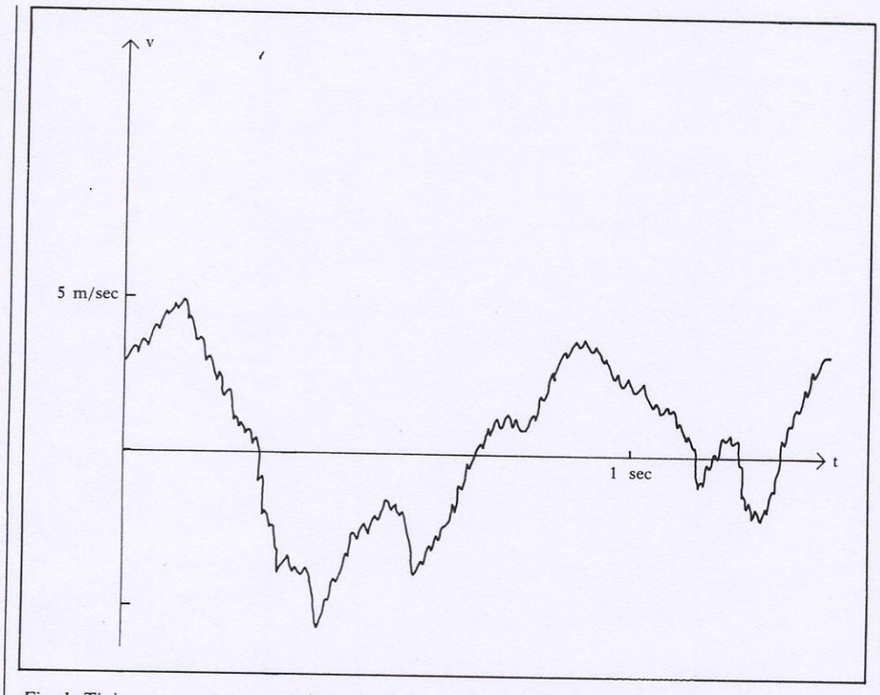


Fig. 1. Tipico comportamento turbolento della velocità verticale del vento in un punto in funzione del tempo

co andamento della velocità in un punto in un fluido in moto turbolento è mostrato in fig. 1.
A cosa è dovuto tale mutamento di comportamento? La descrizione matematica di tale fenomeno è abbastanza complessa; diciamo comunque che si può definire un parametro R (numero di Reynolds, in onore di Osborne Reynolds, che circa un secolo fa iniziò lo studio del fenomeno [1]) che, grosso modo, ci dice se siamo in situazione laminare o turbolenta. Tale numero è dato da

$$R = \frac{UL}{\nu}$$

dove U è la velocità tipica in gioco (nell'esempio del rubinetto, la velocità media di uscita dell'acqua), L la lunghezza tipica (il diametro del rubinetto e ν è un parametro detto viscosità cinematica che dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche del fluido che si considera (acqua, olio, aria, mercurio...) R sostanzialmente indica il rapporto tra il termine di trasporto (non lineare) ed il termine dissipativo (lineare) dell'equazione di Navier-Stokes (vedi scheda) che regola l'evoluzione della velocità e della pressione del fluido. Parlando senza pretesa di rigore si può dire che per piccoli valori di R il moto è 'ordinato' a causa dell'effetto viscoso prevalente (si pensi allo scorrimento di un liquido molto viscoso come il miele), mentre a grandi R la viscosità non è più sufficiente a 'tenere unite' le particelle di fluido che compiono quindi dei moti disordinati. Una descrizone divertente più o meno in questi termini è stata per la prima volta introdotta da Reynolds stesso in una conferenza popolare (vedi la pagina seguente). Il valore critico di R che separa la fase laminare da quella turbolenta è dell'ordine di mille; il valore esatto dipende dalla geometria del problema.
I fluidi in moto turbolento sono estremamente frequenti in natura, e ci si scontra sistematicamente con le difficoltà poste dalla loro comprensione in svariati settori applicativi. A parte l'interesse intrinseco del problema per i suoi aspetti fondamentali, si ha infatti a che fare con la turbolenza, per esempio, in meteorologia, fisica dell'atmosfera, astrofisica, ingegneria idraulica, aerodinamica, oceanografia, ecc.
Descriviamo brevemente le due caratteristiche a nostro avviso più rilevanti della fase turbolenta:
a) forte sensibilità alle condizioni iniziali nell'evoluzione del campo di velocità e pressione;
b) notevole capacità di diffusione e di dissipazione con meccanismi non a livello molecolare.
Siano dati all'istante $t = 0$ due campi di velocità molto 'vicini' (si preparino cioè due esperimenti con condizioni iniziali quasi uguali); quello che tipicamente accade nel moto turbolento è che dopo un certo tempo tipico (abbastanza breve) i due campi di velocità si sono allontanati drasticamente l'uno dall'altro, pur continuando ad essere simili a livello statistico. Kolmogorov formulò un problema legato a tale caratteristica dei moti turbolenti nel seguente modo[2]: si considerino due pianeti perfettamente uguali, con le due atmosfere esattamente nella stessa situazione; ad un certo punto su uno dei pianeti un uomo sventola un fazzoletto; quanto bisogna attendere perché il tempo (meteorologico) sui due pianeti sia completamente diverso? La risposta a questa domanda (data da E. Lorenz[3]) è: circa due settimane! Questo tempo è sostanzialmente il limite oltre il quale è praticamente impossibile fare delle previsioni meteorologiche attendibili, indipendentemente dalle capacità di calcolo dei computer e dalla precisione di rilevamento delle stazioni di osservazione.
Per quanto riguarda i problemi di diffusione si ha un'enorme differenza tra il moto laminare, in cui la diffusione è dovuta all'agitazione termica delle molecole ed è quindi estremamente lenta, ed il moto turbolento, in cui la diffusione è dovuta principalmente al moto caotico a livello macroscopico delle particelle di fluido.

Nonostante O. Reynolds avesse aperto la strada ai tentativi di comprensione teorica della turbolenza sviluppata già alla fine dell'Ottocento, ancora nei primi decenni del nuovo secolo i progressi in tale direzione erano praticamente irrilevanti. Gli ingegneri che avevano a che fare con le innumerevoli situazioni concrete in cui la turbolenza gioca un ruolo dominante dovevano accontentarsi di tabelle empiriche, di dati ottenuti dai primi rudimentali tunnel a vento (dati assai difficili da correlare e spesso contraddittori), senza una guida teorica sicura. Come la definì T. von Kármán, la loro era «la scienza delle costanti variabili».
Con lo sviluppo dell'aviazione dopo la prima guerra mondiale si moltiplicano l'attenzione e l'interesse per i problemi di meccanica applicata legati al perfezionamento del

nuovo mezzo di trasporto. Tra questi, ancora una volta il problema della turbolenza ha un ruolo fondamentale, per svariati motivi: ad esempio, la comprensione dei meccanismi che regolano lo scorrimento di un fluido turbolento lungo una superficie fissa diventa la condizione che può permettere di progettare su basi teoriche un profilo alare con certe caratteristiche, anziché essere costretti a provare uno dopo l'altro diversi modelli in un tunnel a vento e procedere per aggiustamenti empirici.

A questo aumentato interesse corrisponde, a partire dall'inizio del Novecento, e in modo particolarmente sensibile negli anni dopo la prima guerra mondiale, una notevole crescita nelle apparecchiature sperimentali, nei laboratori di ricerca, nel numero di tecnici e scienziati impegnati su questo genere di problemi. Comincia a costituirsi una complessa comunità scientifica che si articola attorno ai problemi di meccanica applicata. Un processo analogo si osserva anche a livello della ricerca fondamentale. Da un certo momento in poi, si può individuare una figura di scienziato che lavora, per esempio, in dinamica dei fluidi, e che, per la propria collocazione istituzionale, le riviste su cui scrive, la propria formazione, il tipo di comunità scientifica internazionale a cui fa riferimento, non può più essere definito propriamente un fisico, o un matematico, o un ingegnere, ma occupa una posizione relativamente autonoma e ben definita rispetto alle discipline vicine. Questo processo ha origine in Germania, e specificamente in quei centri, come Göttingen, dove più efficace era stato lo sforzo, che caratterizza la scena scientifica tedesca di fine Ottocento, di realizzare l'integrazione tra ricerca, università e industria, al fine di sviluppare settori di scienza applicata non svincolati dagli ambienti accademici più legati alla ricerca pura. Ludwig Prandtl, direttore dell'Istituto di fisica tecnica di Göttingen, è un po' il padre di una generazione di scienziati che incorporano la formazione matematica richiesta per trattare teoricamente le questioni più complesse di meccanica applicata, e la sensibilità ingegneristica ai problemi di più immediato interesse applicativo e tecnologico[4].

Il problema tipico che ci si pone in quegli anni per quanto riguarda la turbolenza può essere schematicamente formulato nel seguente modo: dato un fluido costretto a scorrere con condizioni al contorno fissate (che possono essere le pareti di un canale, il profilo di una superficie alare, la sezione di una condotta), come si può determinare il valore medio della velocità del fluido in ogni punto quando si è in situazione di turbolenza sviluppata (alti numeri di Reynolds, come è praticamente sempre il caso nelle situazioni concrete)? L'interesse applicativo della domanda è legato al fatto che dal valor medio della velocità dipendono i valori di tutti quei parametri significativi per la progettazione di strutture efficienti (in particolare i coefficienti di resistenza e di attrito). In un fluido turbolento il valore della velocità varia nel tempo in modo molto irregolare nello stesso punto: lo si può pensare come un valor medio a cui si sovrappone una fluttuazione irregolare. Il problema sta nel fatto che, poiché le equazioni che descrivono il moto del fluido hanno certe spiacevoli caratteristiche dal punto di vista matematico (sono cioè non lineari), non è possibile sbarazzarsi semplicemente del termine fluttuante con una operazione di media (vedi

Sulle due forme di movimento dell'acqua

La questione che ci interessa stasera è abbastanza semplice, e può essere ben spiegata con un'analogia. Abbiamo quasi tutti un certo grado di familiarità con le manovre militari, ed è facile capire che esiste una scienza della tattica militare che ha per oggetto le manovre e le evoluzioni più adatte a soddisfare particolari circostanze.

Supponiamo che questa scienza si basi sull'ipotesi che la disciplina dei soldati sia perfetta, e che essa dunque non tenga conto, per esempio, delle modificazioni nel morale della truppa provocate dalla presenza del nemico.

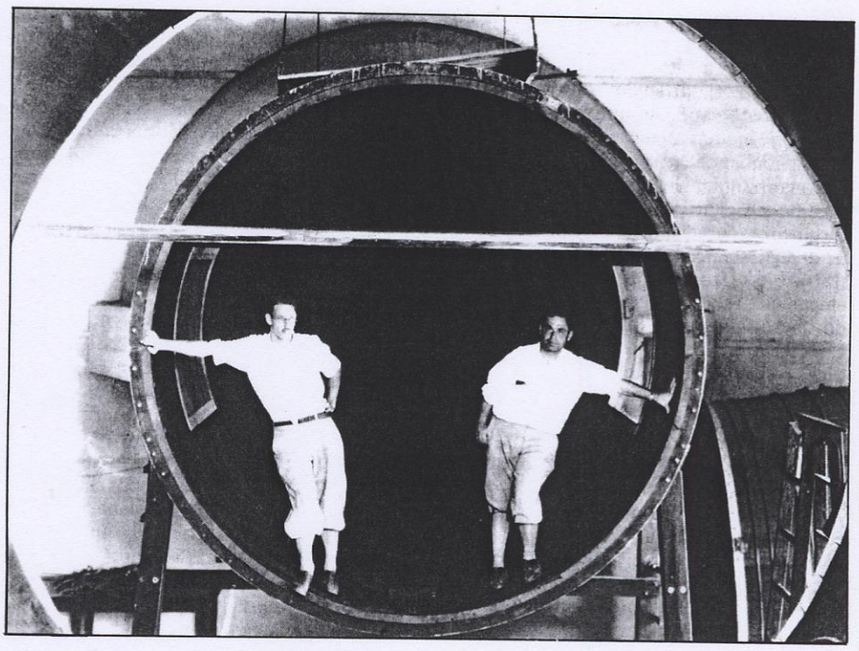
Una teoria simile avrebbe con i movimenti della truppa lo stesso rapporto che ha l'idrodinamica con i moti dell'acqua. Infatti, anche se nella tattica militare si disquisisce solo di movimenti perfettamente disciplinati, la truppa si muove in maniera differente se qualcosa interviene a turbarne l'ordine. Esattamente la stessa cosa accade con l'acqua: in certe circostanze si muoverà in maniera perfettamente regolare e disciplinata, in altri casi diventa una massa di vortici e di correnti che si intersecano, che assomigliano molto al movimento di una massa tumultuosa e agitata in cui ogni singola particella ostruisce le altre. E l'analogia non finisce qui: le circostanze che determinano se il movimento della truppa sarà una marcia regolare o una disordinata passeggiata sono del tutto analoghe a quelle che determinano il carattere lineare o vorticoso del moto dell'acqua. In entrambi i casi, perché ci sia ordine è necessario che influisca un certo fattore: nel caso della truppa è la disciplina; nel caso dell'acqua è la viscosità.

Quanto più elevata è la disciplina dei soldati, o quanto più viscoso è il fluido, tanto più è improbabile che, in qualunque situazione, il moto stazionario venga disturbato. D'altra parte, velocità e dimensioni sono in entrambi i casi fattori che tendono ad indurre instabilità. Più grande è l'esercito, e più veloci sono le manovre da effettuare, più grande è la probabilità di disordine; e così nel caso di un fluido, quanto più largo è il canale, e quanto più alta è la velocità, tanto maggiore è la probabilità che si verifichino vortici. Nel caso delle truppe, alcune manovre sono molto più difficili da eseguire in modo ordinato che non altre, e certe evoluzioni, che potrebbero essere effettuate in perfetta sicurezza durante una parata, sarebbero pura follia in presenza del nemico. Lo stesso accade per l'acqua.

Uno dei miei principali obiettivi nell'introdurre questa analogia militare è di sottolineare il fatto che, anche quando si è in presenza di moti ordinati e stazionari, può esserci una differenza fondamentale nella condizione del fluido. Questo si può capire facilmente nel caso delle truppe. Manovre facili e difficili possono essere eseguite in modo ugualmente ordinato se tutto va bene, ma le condizioni delle truppe in marcia sono essenzialmente diverse nei due casi. Infatti, mentre in un caso un piccolo sbandamento potrebbe essere facilmente rettificato, nell'altro caso porterebbe irrimediabilmente ad uno scompiglio. L'origine di un tale cambiamento dello stato di moto in circostanze simili può essere fatta risalire o alla delicatezza della manovra, o all'evento perturbatore, ma in effetti entrambe queste cause sono necessarie. Nel caso che la manovra sia di una delicatezza estrema, basta una perturbazione infinitamente piccola, quale si può sempre essere sicuri che si verificherà, a produrre il cambiamento (*Osborne Reynolds*, «Proceedings of the Royal Institution of Great Britain» 1884, conferenza tenuta il 28/3/1884).

scheda). Se si prova a scrivere un'equazione per il moto medio, ci si ritrova ad avere a che fare con dei termini che derivano dall'accoppiamento delle diverse componenti dei valori fluttuanti. Bisogna allora in qualche modo 'chiudere' l'equazione, legando, attraverso qualche ipotesi più o meno plausibile, questi termini legati alle irregolarità del moto alle proprietà medie del moto stesso.
Con approssimazioni successive via via più soddisfacenti, questo passo viene compiuto nel corso degli anni venti da L. Prandtl e dal suo ex studente T. von Kármán, introducendo una analogia tra il moto turbolento e il modello della teoria cinetica dei gas. Immaginando che le particelle di fluido siano soggette a spostamenti irregolari analoghi a quelli della agitazione termica delle molecole di un gas, si introduce una 'lunghezza di mescolamento', che rappresenta il corrispettivo nel fluido del cammino libero medio delle molecole nel gas.
Si può allora mettere in relazione semplice, con buona approssimazione, questa lunghezza con il gradiente di velocità medio e con l'intensità dei termini turbolenti in modo da ottenere la chiusura dell'equazione e derivare un'espressione per il profilo medio di velocità. Questo tipo di teorie non sono particolarmente soddisfacenti per il carattere incerto delle ipotesi che ne stanno alla base e perché alcune grandezze che appaiono nei risultati finali devono ancora essere ricavate per via empirica nei singoli casi concreti anziché essere previste rigorosamente. Si parla infatti di «teorie semiempiriche»[5]. Quello che qui ci interessa è rilevare che esse sono state comunque di fondamentale importanza nel mostrare alla comunità dei tecnici e degli ingegneri alle prese con questi problemi l'efficacia di un approccio matematico-formale a fianco del lavoro empirico-sperimentale. Va sottolineato che in queste teorie quello che interessa sono le proprietà medie del flusso; le irregolarità, le fluttuazioni, sono delle complicazioni di cui va tenuto conto solo in quanto influiscono su queste proprietà medie, ma non sono l'oggetto principale dell'indagine. Quello che si cerca di capire è il comportamento medio su grande scala, in cui un ruolo determinante è svolto dalla particolare geometria del problema, che fissa vincoli e condizioni al contorno.

Un modo completamente nuovo di guardare al problema della turbolenza è legato al nome dell'inglese G.I. Taylor[6]. Pubblicata in forma compiuta nel 1935, la sua teoria riprende idee e spunti che egli stesso aveva introdotto una quindicina di anni prima quando, lavorando come meteorologo, si era interessato ai fenomeni di diffusione in aria dovuti alla turbolenza. In questo caso è il problema stesso di cui ci si occupa che suggerisce un approccio diverso; qui non ci sono praticamente condizioni al contorno, e nessun moto di insieme di cui si possano indagare le caratteristiche medie. Quello che interessa sono direttamente le proprietà statistiche delle fluttuazioni della velocità, responsabili dei fenomeni di diffusione. L'assenza di particolari condizioni al contorno fa sì che sia ragionevole fare l'ipotesi che tali proprietà siano le stesse in tutte le direzioni. Al posto di un fluido che scorre in regime turbolento attraverso vincoli determinati si sostituisce, come oggetto di indagine, un campo di velocità variabili in modo caotico le cui proprietà medie sono indipendenti dal punto e dalla direzione. Nella sua forma originale, il problema di Taylor non era molto dissimile da quello del moto browniano, con l'importante differenza che nel caso della turbolenza si deve tener conto della correlazione esistente tra i valori delle varie componenti della velocità in punti vicini. L'armamentario matematico per trattare in modo rigoroso problemi del genere è messo a punto in quegli anni da Norbert Wiener nelle sue ricerche sul moto caotico, ed è proprio attraverso il contatto con Wiener che Taylor recepisce idee e tecniche molto astratte e generali, applicandole con successo al problema specifico della turbolenza sviluppata. Il risultato è la teoria del 1935, in cui vengono definite una serie di grandezze che riassumono le proprietà statistiche della turbolenza sviluppata, e si mostra che a partire da queste grandezze è possibile ricavare informazioni su processi osservabili e misurabili. In particolare, Taylor mostra che attraverso gli strumenti della sua teoria si può dare una spiegazione razionale alla grande difformità dei dati ottenuti nei test nei tunnel a vento, in quanto i valori delle grandezze misurate sperimentalmente risultano dipendere largamente dal grado di turbolenza presente nel flusso d'aria principale, e il modo di variare dell'intensità della turbolenza e le correlazioni esistenti tra queste intesità in punti diversi dell'apparato sono proprio le quantità che la sua teoria permette di tene-



Klark Millikan (figlio del più famoso Robert, grande padre della fisica americana) e A. Klein all'interno della sezione di prova del tunnel a vento in costruzione al California Institute of Technology con la consulenza di T. von Kármán (circa 1926-27) (Archivi del National Air & Space Museum di Washington).

re sotto controllo. È a questa capacità di mostrarsi immediatamente utile sul piano applicativo che va fatta risalire la rapida fortuna della teoria di Taylor, che in caso contrario sarebbe apparsa un puro esercizio in astruserie matematiche agli ingegneri e ai matematici applicati cui egli si rivolgeva[7]. È certo comunque che da questo momento si comincia a guardare con occhi diversi alla turbolenza; parallelamente alla individuazione di leggi semiempiriche che permettano di trattare e affrontare casi particolari, ci si chiede quali siano i meccanismi fisici di fondo che originano il particolare comportamento caotico osservato a scala macroscopica, e si cerca di definire un qualche modello che incorpori i meccanismi fisici fondamentali e si possa trattare in modo da fornire previsioni controllabili.

Il modello che comincia ad emergere è quello del meccanismo 'a cascata' della turbolenza, secondo cui la completa irregolarità sarebbe il risultato della sovrapposizione di un gran numero di vortici di scala differente, in cui i più grandi 'alimentano' (cedono energia a) quelli di scala immediatamente più piccola e così via fino ad arrivare a dimensioni dove diventa dominante l'effetto di viscosità, e l'energia viene dissipata per attrito. L'idea è vecchia, ed era stata esposta in forma particolarmente vivace dal meteorologo inglese L. Richardson intorno al 1920[8]: «Big whorls have little whorls, that fee on their velocity, and little whorls have lesser whorls, and so on to viscosity» («I grandi vortici hanno vortici piccoli, che si mangiano la loro velocità, e i vortici piccoli hanno vortici più piccoli, e così via fino alla viscosità»). Verso la fine degli anni trenta esistono però linguaggi e tecniche matematiche per mettere l'idea in forma più rigorosa; attraverso le tecniche della decomposizione spettrale con l'analisi armonica (trasformata di Fourier) si può dare forma precisa all'idea delle diverse scale in gioco e dell'energia associata ad ognuna di esse, e il linguaggio della teoria della probabilità permette di definire e trattare adeguatamente le grandezze caotiche, che diventano variabili aleatorie.

Il momento in cui questi fattori si condensano a produrre nuovi risultati concreti sono i primi anni quaranta, per opera del matematico russo A. Kolmogorov, il fondatore della moderna teoria della probabilità. In alcuni brevi lavori pubblicati nel 1941[9], Kolmogorov riprende il modello suggerito da Richardson, dandogli veste rigorosa e aggiungendo alcune ipotesi di carattere fisico. Così viene descritto il meccanismo di cascata: «Dal punto di vista energetico è naturale immaginare il processo dell'agitazione turbolenta nel modo seguente: le pulsazioni del primo ordine assorbono l'energia del moto e la trasferiscono successivamente a pulsazioni di ordini più elevati. L'energia delle pulsazioni più piccole è dispersa in energia termica a causa della viscosità». Si fa inoltre l'ipotesi che a piccola scala le proprietà statistiche dipendano solo dalla viscosità ν e dall'energia dissipata ϵ, cioè dalla quantità di energia trasferita per unità di tempo ai vortici di scala immediatamente più piccola. A questo punto è sufficiente il ricorso all'analisi dimensionale per determinare una lunghezza e una velocità caratteristiche (lunghezza di Kolmogorov, $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, e velocità di Kolmogorov, $v = (\nu\epsilon)^{1/4}$), che rappresentano fisicamente la lunghezza d'onda alla quale gli effetti viscosi diventano predominanti, e la velocità tipica associata a vortici di scala η. Si ammette poi che nel range inerziale (cioè, detto grossolanamente, per quei vortici sufficientemente 'grandi' da poter trascurare gli effetti dissipativi dovuti alla viscosità, ma abbastanza 'piccoli' da poter considerare valide le proprietà di isotropia delle statistiche in gioco) l'unica quantità fisica rilevante per la determinazione delle proprietà statistiche sia l'energia dissipata ϵ. Si ottiene allora in modo quasi immediato l'espressione per la quantità di energia associata a vortici di numero d'onda k, che risulta essere, sempre in base a semplici considerazioni dimensionali, proporzionale a $k^{-5/3}$.

Ispirandosi fondamentalmente allo stesso modello, sia pure con l'utilizzo di tecniche differenti, lo stesso risultato è ottenuto indipendentemente in quegli anni da W. Heisenberg[10] e da K. von Weizsäcker[11], nel periodo in cui erano detenuti in Inghilterra subito dopo la fine della guerra insieme ad altri scienziati tedeschi, e dal chimico fisico L. Onsager negli Stati Uniti. In tutti questi casi si tratta di personaggi assai lontani dall'ambiente dei matematici applicati in cui si muovono il Prandtl, Von Kármán, Taylor. C'è al riguardo un episodio divertente: Onsager aveva spedito una lettera a von Kármán comunicandogli le linee essenziali e i risultati principali della sua teoria, e von Kármán aveva passato il tutto al suo assistente Lin, dicendogli di avere ricevuto da «un certo signor Onsager» una lettera che gli sembrava «alquanto svitata»[12]. Quel «certo signor Onsager» era quello che un anno prima aveva dato soluzione esatta ad uno dei più intricati problemi di meccanica statistica sul terreno all'epoca, e la lettera «alquanto svitata» conteneva uno dei pochi risultati generali e quantitativi sulla turbolenza sviluppata. L'incidente dà una misura della distanza che divide l'ambiente scientifico dei due personaggi, della diversità di formazione, interessi, tecniche e linguaggi che li caratterizzano. Dopo essere stata espulsa dall'ambito dei problemi interessanti per la fisica teorica, per essere destinata all'attenzione di altre figure scientifiche con altra professionalità, la turbolenza ritorna, con questi lavori dell'immediato secondo dopoguerra, ad acquistare un intrinseco interesse di carattere fondamentale, indipendentemente dai risvolti di carattere applicativo.

Diamo brevemente un cenno ad alcuni sviluppi moderni della turbolenza sviluppata. C'è da dire che sostanzialmente non si sono avuti grandi passi avanti per quanto riguarda la comprensione teorica. Tutti i tentativi di risolvere il problema della chiusura si sono scontrati con enormi difficoltà; a mala pena si è riusciti a riottenere le leggi di Kolmogorov, ma con tali e tante ipotesi e semplificazioni che alla fine sorge il dubbio di avere 'infilato a mano' il risultato. L'idea base, abbastanza generale, è che, essendo in gioco un gran numero di gradi di libertà, la meccanica statistica della turbolenza dovrebbe essere approssimata da una statistica gaussiana. Apparve dunque naturale[13] proporre una chiusura della gerarchia in cui i momenti di ordine 4 sono espressi in termini di quelli di ordine 2 (come per i processi gaussiani). Questo permette di avere un numero di equazioni pari al numero di variabili, che possono essere risolte numericamente. Purtroppo questa approssimazione è evidentemente troppo rozza, in quanto per questa via si arriva ad ottenere energie cinetiche negative (cosa non piacevole!)[14]; si sono quindi introdotte ipotesi ed approssimazioni ulteriori che hanno finito col portare ad una situazione formalmente più complessa ma sostanzialmente non molto dissimile da quella delle vecchie teorie semiempiriche degli anni venti[15].

Un altro approccio basato su tecniche simili a quelle usate in teoria quantistica dei campi è stato sviluppato soprattutto dal lavoro pionieristico dell'americano Kraichnan[16], che iniziò a sviluppare le prime teorie di questo tipo più di venti anni fa. Anche qui, comunque, si riscontra una drammatica sproporzione tra l'entità degli sforzi realizzati e la scarsezza di risultati significativi.

Qualche progresso è stato invece compiuto nella comprensione del meccanismo di cascata turbolenta. In seguito ad una acuta osservazione di Landau[17] ci si rese conto che la teoria di Kolmogorov non poteva essere

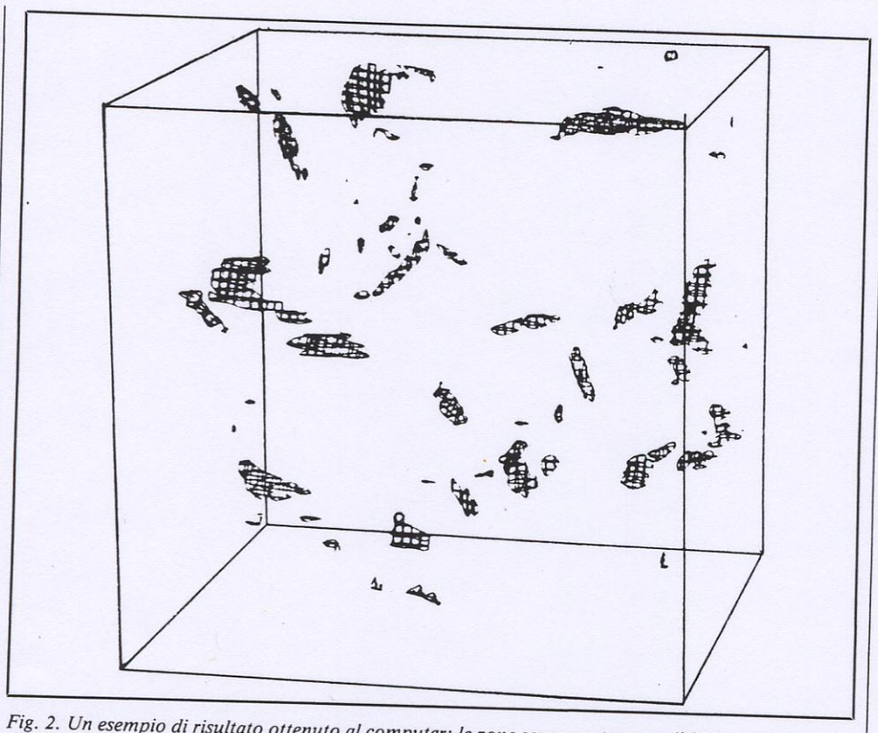


Fig. 2. Un esempio di risultato ottenuto al computer: le zone scure contengono il 95% dell'energia dissipata del fluido nel cubo. È evidente la struttura non banale, come intuito da Landau (tratta da E. D. Siggia, J. Fluid Mech. 107, 1981).

del tutto esatta, in quanto in essa si trascura la possibilità che la densità di energia dissipata possa avere fluttuazioni nello spazio e nel tempo. Tali fluttuazioni di energia dissipata comportano modifiche (anche se numericamente piccole) alle leggi di Kolmogorov che sono state calcolate alla fine degli anni settanta (e rivisitate recentemente)[18] facendo l'ipotesi che la densità di energia dissipata sia concentrata su un oggetto frattale con dimensione minore di tre[19]. Lo scenario che si ottiene presenta la turbolenza come un moto in realtà abbastanza regolare nella maggior parte dello spazio, tranne in una regione (intermittente) con dimensione frattale minore di tre in cui sono localizzate le grandi fluttuazioni di velocità (e quindi la densità di energia dissipata). «Forse nell'atmosfera si aggira un orribile oggetto frattale che ancora non riusciamo a vedere perché gli sperimentali non hanno ancora trovato il modo di visualizzare gradienti di velocità»[20]. Quello che gli sperimentali non sono in grado di mostrare comincia però a vedersi con l'aiuto del computer. il numero di equazioni da trattare e la quantità di operazioni necessarie per una simulazione ad alti numeri di Reynolds sono enormi, tuttavia gli sviluppi tecnologici recenti hanno aperto prospettive interessanti. Con i supercomputer vettoriali (CRAY 1)[21] si riesce attualmente ad effettuare simulazioni con $128 \times 128 \times 128$ equazioni nel caso tridimensionale (e 512×512 nel caso bidimensionale), il che già permette di ottenere qualche risultato a numeri di Reynolds non troppo elevati. Si veda ad esempio la figura 2, che mostra le zone intermittenti (cioè quelle contenenti la maggior parte dell'energia dissipata). In una situazione come quella della turbolenza sviluppata, in cui la teoria formale è sostanzialmente ferma da decine di anni e la parte sperimentale è estremamente difficile da realizzare, la simulazione numerica massiccia e sistematica è forse l'unica possibilità di indagine. Si può dire che la simulazione permette per la turbolenza dei veri e propri esperimenti mentali in qualche modo più chiari e comprensibili di quelli reali. Ad esempio in un esperimento reale è impossibile non tener conto delle condizioni al bordo, che possono invece essere 'eliminate' in una simulazione imponendo condizioni periodiche. Ciò permette di concentrarsi sulla struttura essenziale delle equazioni di Navier-Stokes senza l'intralcio di troppi 'dettagli'. Molto (fin troppo) resta ancora da chiarire. Per quanto l'affermazione suoni paradossale, è ancora buona l'osservazione fatta da Frisch qualche anno fa: «Io credo che noi abbiamo una conoscenza *peggiore* di ciò che accade in un millimetro cubo di aria che non di ciò che accade dentro un nucleo atomico».

NOTE

1) O. REYNOLDS, Phil. Trans. Roy. Soc. 174 (1883)
2) A. S. MONIN, *Weather Forecasting as a Problem in Physics*, MIT Press, 1972
3) E. N. LORENZ, *Tellus 21 (1969)*
C. E. LEITH, J. ATOMS. *Sci. 28* (1971)
4) G. BATTIMELLI, *Rivista di Storia della Scienza 1* (1984)
5) Vedi al riguardo A. S. MONIN, A. M. YAGLOM, *Statistical Fluid Mechanics*, vol. I, MIT Press, 1971
6) G. I. TAYLOR, *Proc. Roy. Soc.* London *A 151* (1935)
7) G. BATTIMELLI, *Atti del II Congresso Nazionale di Storia della Fisica,* Palermo, 1982
8) L. F. RICHARDSON, *Weather Prediction by Numerical Process*, Cambridge, 1922
9) A. N. KOLMOGOROV, *Compt. Rend. Acad. Sc.* URSS *30, 31, 32* (1941)
10) W. HEISENBERG, *Zeit. f. Phys. 124* (1948)
11) K. VON WEIZSÄCKER, *Zeit. f. Phys. 124* (1948)
12) G. BATTIMELLI, A. VULPIANI, *Atti del III Congresso Nazionale di Storia della Fisica,* Palermo, 1982
13) I. PROUDMAN, V. H. REID, *Phil. Trans. Roy. Soc.* London *A 247* (1954)
14) Y. OGURA, *J. Fluid Mech. 16* (1962)
15) S. A. ORSZAG, *J. Fluid Mech. 41* (1970)
P. L. SULEM, M. LESIEUR, U. FRISCH, *Ann. Geophys. 31* (1975)
16) R. H. KRAICHNAN, *Phys. Rev. 109* (1958); *J. Fluid Mech. 5* (1959); *J. Math. Phys. 3* (1962); *Phys. Fluids 8* (1963)
17) L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ, *Fluid Mechanics,* Addison-Wesley 1959
18) B. B. MANDELBROT, *J. Fluid Mech. 62* (1974)
U. FRISCH, P. SULEM, N. NELKIN, *J. Fluid. Mech. 87* (1978)
R. BENZI, G. PALADIN, G. PARISI, A. VULPIANI, *J. Phys. 17 A* (1984)
19) L. PELITI, A. VULPIANI, *Sapere,* aprile-maggio 1985
20) U. FRISCH, in *Problemi di una politica della scienza,* Camerino 1979
21) R. D. LEVINE, *Le Scienze,* marzo 1982
D. COMTE, J. C. SYRE, *La Recherche* 14 (1983)