Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti e A. Vulpiani
Compito del 14.11.2016

Si considerino N particelle identiche di massa m contenute in un cilindro di altezza L, raggio $3R$ ed asse coincidente con l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano (x, y, z). Le particelle sono non interagenti con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(x, y),$$

dove $p = |\mathbf{p}|$, $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e

$$V(x, y) = \begin{cases} V_0 \frac{x^2+y^2}{R^2}, & \sqrt{x^2+y^2} < R; \\ V_0, & R \leq \sqrt{x^2+y^2} < 2R; \\ 2V_0, & 2R \leq \sqrt{x^2+y^2} < 3R; \end{cases}$$

con V_0 costante positiva arbitraria.

1. Assumendo che il sistema, in equilibrio a temperatura T, sia descrivibile dalla statistica classica di Boltzmann:
   - 1.a) Calcolare l'energia media per particella $E(T)/N$;
   - 1.b) Calcolare la pressione a distanza R dall'asse del cilindro;
   - 1.c) Calcolare la pressione a distanza $3R/2$ dall'asse del cilindro e sulla parete laterale del cilindro;
   - 1.d) Mostrare che esiste una temperatura T^* tale che per $T > T^*$ la probabilità di avere almeno $N/3$ particelle nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ tende a zero per $N \to \infty$. Scrivere, senza risolvere, l'equazione che determina T^*.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Discutere l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 3/2:
   - 3.a) Determinare il numero massimo di particelle tale che a $T = 0$ tutte le particelle si trovino nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < 2R$.
   - 3.b) In riferimento al punto precedente, calcolare il rapporto tra il numero di particelle che a $T = 0$ si trovano nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ e quelle che si trovano nella regione $R \leq \sqrt{x^2+y^2} < 2R$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 2, 1.d: 6
  2.a: 6
  3.a: 5, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann $k_{\rm B}$ è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di N particelle non interagenti $E/N = \langle H \rangle$, dove H è la Hamiltoniana di singola particella. Essendo la parte cinetica quadratica, usando il teorema di equipartizione si ha:

$$E/N = \frac{3}{2}T + \langle V(x,y) \rangle,$$

dove

$$\langle V(x,y) \rangle = \frac{\int d^3p d^3q\, e^{-\beta V(\mathbf{q})}\, V(\mathbf{q})}{\int d^3p d^3q\, e^{-\beta V(\mathbf{q})}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \int d^3p d^3q\, e^{-\beta V(\mathbf{q})}.$$

Nel caso specifico del problema $V(\mathbf{q}) = V(x,y) = V(r)$, dove $r = \sqrt{x^2+y^2}$, per cui

$$\begin{aligned}
\int d^3q\, e^{-\beta V(\mathbf{q})} &= \int_0^L dz \int_0^{3R} e^{-\beta V(r)} 2\pi r dr \\
&= 2\pi L \left[\int_0^R dr\, r\, e^{-\beta V_0 r^2/R^2} + \int_R^{2R} dr\, r\, e^{-\beta V_0} + \int_{2R}^{3R} dr\, r\, e^{-2\beta V_0} \right] \\
&= \pi L \left[\frac{R^2}{\beta V_0}\Big(1 - e^{-\beta V_0}\Big) + R^2(4-1)e^{-\beta V_0} + R^2(9-4)e^{-2\beta V_0} \right] \\
&= \frac{\pi R^2 L}{\beta V_0}\Big[1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)\Big].
\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\langle V(x,y) \rangle = \beta^{-1} - V_0 \frac{(4 - 3\beta V_0)\, e^{-\beta V_0} + 5(1 - 2\beta V_0)\, e^{-2\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)},$$

e quindi:

$$\boxed{E/N = \frac{5}{2}T - V_0 \frac{(4 - 3\beta V_0)\, e^{-\beta V_0} + 5(1 - 2\beta V_0)\, e^{-2\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}}$$

1.b) Consideriamo il guscio cilindrico $\mathcal{C}_r$ di raggio interno $r \leq 3R$, spessore dr ed altezza L. All'interno del guscio il potenziale $V(x,y)$ è costante ed il sistema si comporta come un gas perfetto alla pressione

$$P(r) = \rho(r)\, T,$$

dove $\rho(r)$ è la densità di particelle nel guscio.

Essendo le particelle indipendenti se indichiamo con $p_1(\mathcal{C}_r)\, dV$, dove $dV = 2\pi r L dr$ è il volume del guscio $\mathcal{C}_r$, la probabilità che una particella di trovi nel guscio, in $\mathcal{C}_r$ vi saranno $dN(\mathcal{C}_r) = N p_1(\mathcal{C}_r)\, dV$ particelle. Di conseguenza la densità $\rho(r)$ è

$$\rho(r) = \frac{dN(\mathcal{C}_r)}{dV} = N p_1(\mathcal{C}_r) = N \frac{e^{-\beta V(r)}}{\int d^3q\, e^{-\beta V(\mathbf{q})}}, = \frac{N \beta V_0}{\pi R^2 L} \frac{e^{-\beta V(r)}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)},$$

da cui

$$P(r) = \rho V_0 \frac{e^{-\beta V(r)}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}, \qquad 0 \leq r \leq 3,$$

dove $\rho = N/\pi R^2 L$.

Allo stesso risultato si può giungere considerando un cilindro di raggio $r \leq 3R$ e calcolando la pressione sulla sua superficie dalla formula:

$$P(r) = NT \left(\frac{\partial}{\partial V_r}\right)_{T,N} \ln Z_1(T, V_r), \qquad Z_1(T, V_r) = \int_{\mathbf{q} \in V_r} \frac{d^3p\, d^3q}{h^3}\, e^{-\beta H(\mathbf{p},\mathbf{q})}, \qquad V_r = \pi r^2 L.$$

In conclusione la pressione a distanza R dall'asse del cilindro vale

$$\boxed{P(R) = \rho V_0 \frac{e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.}$$

1.c) Usando il risultato del punto precedente la pressione a distanza $3R/2$ dall'asse del cilindro vale

$$\boxed{P(3R/2) = \rho V_0 \frac{e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.}$$

mentre sulla superficie laterale del cilindro vale

$$\boxed{P(3R) = \rho V_0 \frac{e^{-2\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.}$$

1.d) La probabilità $P_1(r \le R)$ che una particella si trovi nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ è data da

$$P_1(r \le R) = \int_{r \le R} p_1(\mathcal{C}_r)\, dV.$$

Usando i risultati dei punti 1.a) e 1.b) si trova facilmente che

$$P_1(r \le R) = \frac{1 - e^{-\beta V_0}}{1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\big(3e^{-\beta V_0} + 5e^{-2\beta V_0}\big)}.$$

Siccome una particella si troverà nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ con probabilità $p = P_1(r \le R)$ e non vi si troverà con probabilità $1-p$, la probabilità $P_N(n)$ che n particelle siano nella regione è data da:

$$P_N(n) = \frac{N!}{(N-n)!\, n!}\, p^n (1-p)^{N-n}.$$

Ne segue che nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ vi sono in media $\overline{n} = N\, P_1(r \le R)$ particelle, con una varianza $\sigma^2 = Np(1-p)$. Di conseguenza nel limite $N \gg 1$ la probabilità che $n \neq \overline{n}$ è esponenzialmente piccola in N. Siccome

$$\lim_{T \to 0} P_1(r \le R) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{n} = N,$$

$$\lim_{T \to \infty} P_1(r \le R) = \frac{1}{9} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{n} = \frac{N}{9},$$

esiste una temperatura T^* tale che $\overline{n} = N/3$. Inoltre, siccome $\overline{n} < N/3$ per $T > T^*$, ne concludiamo che per $T > T^*$ la probabilità di trovare più di $N/3$ particelle nella regione $\sqrt{x^2+y^2} < R$ è trascurabile per $N \gg 1$. La temperatura T^* è determinata dall'equazione

$$\boxed{\frac{1 - e^{-\beta^* V_0}}{1 - e^{-\beta^* V_0} + \beta^* V_0\big(3e^{-\beta^* V_0} + 5e^{-2\beta^* V_0}\big)} = 1/3.}$$

2.a Se il sistema è composto da Bosoni di spin 0 il numero di particelle a temperature T è pari a $N = N_0 + \tilde{N}$; dove N_0 è il numero di particelle nello stato condensato ($\epsilon = \epsilon_{\min}$) ed $\tilde{N}$ il numero di particelle nello stato non-condensato ($\epsilon > \epsilon_{\min}$) dato da,

$$\tilde{N} = \int_{\epsilon_{\min}}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1},$$

dove $G(\epsilon)$ è la densità degli stati di singola particella che, trascurando le possibili correzioni introdotte dalla parete del cilindro sugli autovalori dell'energia, è data da

$$G(\epsilon) = \int \frac{d^3p\, d^3q}{h^3}\, \delta\big(\epsilon - H(\mathbf{p},\mathbf{q})\big) = \frac{2\pi L}{h^3} \int d^3p \int_0^{3R} dr\, r\, \delta\big(\epsilon - p^2/2m - V(r)\big),$$

ed $\epsilon_{\min} = 0$. Usando l'identità

$$\delta\big(f(p)\big) = \sum_k \frac{1}{|f'(p_k)|}\, \delta(p - p_k), \qquad \text{con } p_k:\ f(p_k) = 0,$$

otteniamo

$$\delta\big(\tilde{\epsilon} - ap^2\big) = \frac{1}{2ap_0}\big[\delta(p - p_0) + \delta(p + p_0)\big], \qquad \text{con } p_0 = \sqrt{\tilde{\epsilon}/a}.$$

Ne segue

$$\int d^3p\, \delta(\tilde{\epsilon} - p^2/2m) = 4\pi \int_0^{+\infty} dp\, p^2\, \delta\big(\tilde{\epsilon} - p^2/2m\big) = 4\pi\, m\, p_0\, \theta(\tilde{\epsilon}) = 2\pi(2m)^{3/2}\sqrt{\tilde{\epsilon}}\, \theta(\tilde{\epsilon}),$$

per cui

$$G(\epsilon) = \frac{4\pi^2 L}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^{3R} dr\, r\, \sqrt{\epsilon - V(r)}\, \theta\big(\epsilon - V(r)\big).$$

Alternativamente utilizzando l'identità $\delta(x) = (d/dx)\theta(x)$ si ha:

$$\begin{aligned}
G(\epsilon) &= \frac{2\pi L}{h^3}\frac{d}{d\epsilon} \int d^3p \int_0^{3R} dr\, r\, \theta\big(\epsilon - p^2/2m - V(r)\big) \\
&= \frac{2\pi L}{h^3}\frac{4\pi}{3}(2m)^{3/2}\frac{d}{d\epsilon} \int_0^{3R} dr\, r\, \big[\epsilon - V(r)\big]^{3/2}\theta\big(\epsilon - V(r)\big) \\
&= \frac{4\pi^2 L}{h^3}(2m)^{3/2} \int_0^{3R} dr\, r\, \sqrt{\epsilon - V(r)}\, \theta\big(\epsilon - V(r)\big).
\end{aligned}$$

Dalla forma del potenziale $V(r)$ segue:

$$\begin{aligned}
\int_0^{3R} dr\, r\, \sqrt{\epsilon - V(r)}\, \theta\big(\epsilon - V(r)\big) &= \int_0^{R} dr\, r\, \sqrt{\epsilon - ar^2}\, \theta\big(\epsilon - ar^2\big) \\
&\quad + \int_R^{2R} dr\, r\, \sqrt{\epsilon - V_0}\, \theta\big(\epsilon - V_0\big) + \int_{2R}^{3R} dr\, r\, \sqrt{\epsilon - 2V_0}\, \theta\big(\epsilon - 2V_0\big) \\
&= \frac{1}{3a}\big[\epsilon^{3/2}\theta(\epsilon) - (\epsilon - aR^2)^{3/2}\theta(\epsilon - aR^2)\big] \\
&\quad + \frac{3R^2}{2}\sqrt{\epsilon - V_0}\, \theta\big(\epsilon - V_0\big) + \frac{5R^2}{2}\sqrt{\epsilon - 2V_0}\, \theta\big(\epsilon - 2V_0\big),
\end{aligned}$$

dove $a = V_0/R^2$. Ne segue che:

$$\begin{aligned}
G(\epsilon) = \frac{4\pi^2 R^2 L}{h^3}(2m)^{3/2}\Big[&\frac{1}{3V_0}\big[\epsilon^{3/2}\theta(\epsilon) - (\epsilon - V_0)^{3/2}\theta(\epsilon - V_0)\big] \\
&+ \frac{3}{2}\sqrt{\epsilon - V_0}\, \theta\big(\epsilon - V_0\big) + \frac{5}{2}\sqrt{\epsilon - 2V_0}\, \theta\big(\epsilon - 2V_0\big)\Big].
\end{aligned}$$

Notando che

$$G(\epsilon) \sim \epsilon^{3/2}\, \theta(\epsilon), \qquad \text{as } \epsilon \to 0,$$

segue che

$$\boxed{\int_0^{\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} < \infty, \qquad \Rightarrow \text{Esiste condensazione BE.}}$$

3.a L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, quindi il numero totale di particelle è:

$$N = 4\int_0^{\epsilon_F} d\epsilon\, G(\epsilon),$$

dove $G(\epsilon)$ è stata calcolata al punto 2.a). Il numero massimo di particelle che a $T = 0$ possono essere sistemate nella regione $\sqrt{x^2 + y^2} < 2R$ si ha per

$$\epsilon_F = 2V_0,$$

e vale:

$$\begin{aligned} N &= \frac{16\pi^2 R^2 L}{h^3}(2m)^{3/2}\left[\frac{1}{3V_0}\int_0^{2V_0} d\epsilon\ \epsilon^{3/2} - \frac{1}{3V_0}\int_{V_0}^{2V_0} d\epsilon\ (\epsilon - V_0)^{3/2} + \frac{3}{2}\int_{V_0}^{2V_0} d\epsilon(\epsilon - V_0)^{1/2}\right] \\ &= \frac{16\pi^2 R^2 L}{h^3}(2m)^{3/2}\left[\frac{2}{15V_0}(2V_0)^{5/2} - \frac{2}{15V_0}V_0^{5/2} + V_0^{3/2}\right] \\ &= \frac{16\pi^2 R^2 L}{h^3}(2m)^{3/2}\left[\frac{8\sqrt{2}-2}{15}V_0^{3/2} + V_0^{3/2}\right] \end{aligned}$$

Ovvero

$$\boxed{N = \frac{16\pi^2 R^2 L}{15}(8\sqrt{2} + 13)\left(\frac{2mV_0}{h^2}\right)^{3/2}.}$$

3.b Dai risultati del punto 3.a), segue che il rapporto richiesto vale

$$\boxed{\frac{N(r < R)}{N(R \leq r < 2R)} = \frac{8\sqrt{2}-2}{15}.}$$