Corso di Meccanica Statistica, A.A. 2014-2015
Compito del 10 settembre 2015

Un solo libro, niente appunti, quaderni, ecc.
Scrivere in stampatello sul primo foglio in alto a sinistra
COGNOME e N. (iniziale del nome) // esempio: BOLTZMANN L.

Un sistema è costituito da N particelle indipendenti che possono muoversi sull' intervallo $(0, ML)$, l' Hamiltoniana di singola particella è

$$H = a\,|p| + V(q)\,, \quad \text{con} \quad a > 0 \quad , \quad 0 \leq q \leq ML$$

e dove
$V(q) = (k-1)V_0$ se $(k-1)L < q \leq kL$, $k = 1, 2, ..., M$,
con $V_0 > 0$.

a) Si assuma che valga la statistica classica di Boltzmann, si calcoli al variare della temperatura T:
a1- l'energia media per particella;
a2- il numero medio di particelle nell'intervallo $(0, 2L)$;
a3- la probabilità che nell'intervallo $(0, 2L)$ ci siamo almeno 2 particelle.

b) Nel caso di fermioni di spin 1/2
b1- calcolare in massimo numero di particelle N_* affinché a $T = 0$ tutte le particelle si trovino nell'intervallo $(0, L)$;
b2- l'energia media a $T = 0$ nel caso $\epsilon_F = 2V_0$.

Si ricordi che

$$\sum_{n=0}^{q} x^n = \frac{1 - x^{q+1}}{1 - x}\,.$$

a1) $\frac{U}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln z$

$$z = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta a|p|}\,dp \int_0^{ML} e^{-\beta V(q)}\,dq$$

$$= \frac{2}{h}\int_0^{\infty} e^{-\beta a p}\,dp \left\{ \int_0^{L} dq + \int_L^{2L} dq\, e^{-\beta V_0} + \dots + \int_{(M-1)L}^{ML} dq\, e^{-\beta V_0 (M-1)} \right\}$$

$$= \frac{2}{h}\frac{1}{\beta a}\left\{ L + L(e^{-\beta V_0}) + \dots + L(e^{-\beta V_0})^{M-1} \right\}$$

e usando la formula data

$$z = \frac{2}{h}\frac{1}{\beta a} L\left(\frac{1-e^{-\beta V_0 M}}{1-e^{-\beta V_0}} \right) \quad \text{da cui}$$

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{\beta} - \frac{M V_0 e^{-\beta V_0 M}}{1-e^{-\beta V_0 M}} + \frac{V_0 e^{-\beta V_0}}{1-e^{-\beta V_0}}$$

$$= \frac{1}{\beta} - \frac{M V_0}{e^{\beta V_0 M}-1} + \frac{V_0}{e^{\beta V_0}-1}$$

a2) $$p(0,2L) = \frac{\int_0^{2L} dq\, e^{-\beta V(q)}}{\int_0^{ML} dq\, e^{-\beta V(q)}}$$

$$= \frac{\cancel{L}(1+e^{-\beta V_0})}{\cancel{L}(1-e^{-\beta V_0 M})/(1-e^{-\beta V_0})} = \frac{1-e^{-2\beta V_0}}{1-e^{-\beta V_0 M}}$$

a3) Se $P(\geq 2)$ è la probabilità cercata

e $P(k)$ indica la probabilità che nell'intervallo $(0, 2L)$ ci siano esattamente k particelle

si ha $P(0) + P(1) + P(\geq 2) = 1$ e quindi

$$P(\geq 2) = 1 - P(0) - P(1)$$

poiché $P(k) = p^k (1-p)^{N-k} \binom{N}{k}$

avendo indicato con p la probabilità calcolata nel punto a2) : $p \equiv p(0, 2L)$

si ha $P(0) = (1-p)^N$ $\quad P(1) = N p (1-p)^{N-1}$

da cui

$$P(\geq 2) = 1 - (1-p)^N - Np(1-p)^{N-1}$$

b1) Numero di stati con energia fino a ϵ

$$N(\epsilon) = \frac{2}{h} \int_{a|p| + V(q) \leq \epsilon} dp\, dq$$

perché non ci siano particelle con $q > L$ devo considerare le energie fino a $\epsilon = V_0$

$$N_* = N(\epsilon = V_0) = \frac{2}{h} \int_0^L dq \int_{a|p| \leq V_0} dp = \frac{2}{h} L \frac{2 V_0}{a}$$

b2) si ha $U(T=0) = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon\, G(\epsilon)\, d\epsilon = \int_0^{2V_0} \epsilon\, G(\epsilon)\, d\epsilon$

con $G(\epsilon)$ densità degli stati $G(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} N(\epsilon)$

all'integrale per $U(T=0)$ partecipano tutti gli stati con energia fino a $2V_0$ e quindi

$$N(\epsilon \leq 2V_0) = \frac{2}{h} \left\{ \int_0^L dq \int_{a|p| \leq \epsilon} dp + \int_L^{2L} dq \int_{a|p| + V_0 \leq \epsilon} dp \right\}$$

$$= \frac{2}{h} \left\{ L \frac{2\epsilon}{a} + L \frac{2(\epsilon - V_0)}{a} \Theta(\epsilon - V_0) \right\}$$

dove la funzione gradino $\Theta(\epsilon - V_0)$ tiene conto del fatto che il secondo contributo esiste solo per gli stati con $\epsilon > V_0$

$$G(\epsilon \leq 2V_0) = \frac{4L}{ha}\left\{ 1 + \Theta(\epsilon - V_0) \right\}$$

$$U(T=0) = \frac{4L}{ha}\int_0^{2V_0} \epsilon \left\{1 + \Theta(\epsilon - V_0)\right\} d\epsilon$$

$$= \frac{4L}{ha}\left\{ \int_0^{2V_0} \epsilon \, d\epsilon + \int_{V_0}^{2V_0} \epsilon \, d\epsilon \right\}$$

$$U(T=0) = \frac{14L}{ha} V_0^2$$