Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti e A. Vulpiani
Compito del 12.09.2017

Un sistema è costituito da N particelle identiche non interagenti con energia di singola particella pari a:

$$\epsilon_{n,m} = n\Delta + mA, \qquad n = 0, 1, \ldots, M;\ m = \pm 1,$$

con $\Delta > 0$ e $A \geq 0$.

1. Assumendo il sistema in equilibrio a temperatura T e cha valga la statistica classica di Boltzmann:
   1.a) Calcolare l'energia media per particella $E(T)/N$ in funzione della temperatura T.
   1.b) Calcolare la probabilità $\mathcal{P}_1(n \leq 5, m = 1)$ che a temperatura T una data particella abbia $n \leq 5$ e $m = 1$.
   1.c) Calcolare l'entropia per particella in funzione della temperatura T, ed il suo valore per $T = 0$ e $T \to \infty$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0, $M = 2$ ed $A = 0$ [Assumere $\epsilon_{n,m} = \epsilon_n$]:
   2.a) Calcolare l'energia media E in funzione di T e μ.
   2.b) Calcolare il numero medio di particelle con energia positiva in funzione di T e μ.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2, $M \gg 1$ ed $A = 0$ [Assumere $\epsilon_{n,m} = \epsilon_n$]:
   3.a) Calcolare l'energia di Fermi in funzione di N.
   3.b) Calcolare l'energia media a $T = 0$ in funzione di N.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4 , 1.c: 5
  2.a: 4, 2.b: 4
  3.a: 4, 3.b: 5

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'energia media può essere calcolata direttamente dalla funzione di partizione canonica $Z_N(T)$ mediante la relazione $E(T) = -(\partial/\partial\beta)\ln Z_N(T)$. Essendo il sistema composto da particelle identiche non interagenti:

$$Z_N(T) = Z_1(T)^N/N! \qquad \Rightarrow \qquad E(T) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1(T),$$

dove

$$Z_1(T) = \sum_{n=0,\ldots,M}\sum_{m=\pm1} e^{-\beta\epsilon_{n,m}} = \sum_{n=0,\ldots,M} e^{-n\beta\Delta}\sum_{m=\pm1} e^{-m\beta A} = \frac{1-e^{-(M+1)\beta\Delta}}{1-e^{-\beta\Delta}}\left[e^{\beta A}+e^{-\beta A}\right],$$

è la funzione di partizione canonica di singola particella.

Sostituendo otteniamo:

$$\boxed{E(T)/N = -\frac{(M+1)\Delta}{e^{(M+1)\beta\Delta}-1} + \frac{\Delta}{e^{\beta\Delta}-1} - A\tanh\beta A.}$$

1.b) La probabilità $p_{n,m}$ di trovare una particella con energia $\epsilon_{n,m}$ a temperatura T è data da:

$$p_{n,m} = \frac{e^{-\beta\epsilon_{n,m}}}{Z_1(T)}.$$

Ne segue che:

$$\mathcal{P}_1(n\le 5, m=1) = \sum_{n=0,\ldots,5} p_{n,1} = \frac{1}{Z_1}\sum_{n=0,\ldots,5} e^{-n\beta\Delta}\,e^{-\beta A},$$

da cui:

$$\boxed{\mathcal{P}_1(n\le 5, m=1) = \frac{1-e^{-6\beta\Delta}}{1-e^{-(M+1)\beta\Delta}}\,\frac{e^{-\beta A}}{e^{\beta A}+e^{-\beta A}}.}$$

1.c) L'entropia S è può essere ottenuta dall'energia libera $F = E - TS$ come:

$$S(T) = \beta(E-F),$$

con $E(T) = -(\partial/\partial\beta)\ln Z_N(T)$ ed $F = -T\ln Z_N(T)$. Sostituendo $Z_N(T) = Z_1(T)^N/N!$, ed utilizzando i risultati del punto 1.a), si ha:

$$\boxed{S(T)/N = -\frac{(M+1)\beta\Delta}{e^{(M+1)\beta\Delta}-1} + \frac{\beta\Delta}{e^{\beta\Delta}-1} - \beta A\tanh\beta A + \ln\left[\frac{1-e^{-(M+1)\beta\Delta}}{1-e^{-\beta\Delta}}\left[e^{\beta A}+e^{-\beta A}\right]\right] + \ln(e/N).}$$

Nel limite $T\to 0$ si ha:

$$E(T)/N \sim -A + O(e^{-\beta(\text{constante})}), \qquad \ln Z_1(T) \sim \beta A + O(e^{-\beta(\cdot)}),$$

da cui segue:

$$\boxed{S(T\to 0)/N = \ln(e/N).}$$

A $T = 0$ ciascuna particella si trova nello stato fondamentale di energia $\epsilon_{0,-1}$, per cui vi è un solo stato possibile e rimane solo il contributo entropico dovuto allo scambio delle particelle identiche.

Nel limite $T\to\infty$ si ha:

$$E(T)/N \sim \frac{\Delta}{2} + O(\beta), \qquad \ln Z_1(T) \sim \ln[2(M+1)] + O(\beta),$$

e quindi

$$\boxed{S(T \to \infty)/N = \ln[2(M+1)] + \ln(e/N).}$$

A $T = \infty$ ciacuna particella può trovarsi con la stessa probabilità in un qualsiasi stato energetico $\epsilon_{n,m}$, per un totale di $2(M+1)$ stati possibili.

2.a) Se il sistema è composto da Bosoni di spin 0 il numero medio di particelle che a temperatura T è si trovano nello stato energetico ϵ_n è dato da:

$$n(\epsilon_n) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_n - \mu)} - 1},$$

dove μ è il potenziale chimico. Di conseguenza, dato che $A = 0$:

$$E = \sum_{n=0,1,2} n(\epsilon_n)\,\epsilon_n = \sum_{n=0,1,2} \frac{n\Delta}{e^{\beta(n\Delta - \mu)} - 1}$$

da cui:

$$\boxed{E = \frac{\Delta}{e^{\beta(\Delta - \mu)} - 1} + \frac{2\Delta}{e^{\beta(2\Delta - \mu)} - 1}.}$$

2.b) Gli stati ad energia positiva sono quelli con $n = 1, 2$, di conseguenza il numero richiesto è

$$\mathcal{N} = \sum_{n=1,2} n(\epsilon_n) = \sum_{n=1,2} \frac{1}{e^{\beta(n\Delta - \mu)} - 1},$$

ovvero:

$$\boxed{\mathcal{N} = \frac{1}{e^{\beta(\Delta - \mu)} - 1} + \frac{1}{e^{\beta(2\Delta - \mu)} - 1}.}$$

3.a) Se il sistema è composto da Fermioni di spin 1/2 il numero medio di particelle che a temperatura T è si trovano nello stato energetico ϵ_n è dato da:

$$n(\epsilon_n) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_n - \mu)} + 1} = \frac{1}{e^{\beta(n\Delta - \mu)} + 1},$$

dove μ è il potenziale chimico.

Ne segue che il livello massimo n^* che può essere occupato a $T = 0$ è tale che $n^*\Delta = \epsilon_{\mathrm{F}}$. Di conseguenza a $T = 0$ si ha,

$$N = g \sum_{n=0,\ldots,n^*} 1 = 2(n^* + 1),$$

dove $g = 2$ è la degenerazione dovuta allo spin. Da cui segue facilmente:

$$\boxed{\epsilon_{\mathrm{F}} = \Delta\left(\frac{N}{2} - 1\right) \simeq \frac{N\Delta}{2}.}$$

3.b) L'energia media a $T = 0$ è data da

$$E = g \sum_{n=0,\ldots,n^*} \epsilon_n = 2 \sum_{n=0,\ldots,n^*} n\Delta = 2\frac{\Delta}{2} n^*(n^* + 1)$$

da cui usando il risultato del punto precedente:

$$\boxed{E = \frac{\Delta}{2} N \left(\frac{N}{2} - 1\right) \simeq \frac{\Delta N^2}{4} = \frac{N}{2}\epsilon_{\mathrm{F}}.}$$