Il fenomeno di Gibbs

Questo fenomeno, osservato per la prima volta in modo empirico dal fisico sperimentale Michelson (quello dell'esperimento sull'etere), e dimostrato da Gibbs, riguarda la convergenza di serie di Fourier di funzioni discontinue:
Sia $f(x)$ una funzione in $[-\pi, \pi]$ regolare a tratti con una discontunità Δf in x_0 allora in prossimità di x_0 la somma di Fourier parziale $S_N(x)$ presenta un picco con un'altezza pari a circa il 9% della discontinuità

Mostriamo il fenomeno in un caso esplicito:

$$f(x) = -1 \ \ per \ \ -\pi < x < 0$$

$$f(x) = 0 \ \ per \ x = 0$$

$$f(x) = 1 \ \ per \ 0 < x < \pi \, .$$

È facile calcolare i coefficienti di Fourier: si hanno solo i termini dispari dello sviluppo del seno e la somma parziale è

$$S_{2N-1}(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2N-1}\sin(2N-1)x\Big)$$

per trovare i massimi calcoliamo la derivata

$$S'_{2N-1}(x) = \frac{4}{\pi}\Big(\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2N-1)x\Big) \, .$$

Si può dimostrare che

$$\pi \sin x S'_{2N-1}(x) = 2\sin(2Nx) \, . \tag{1}$$

Usando la formula di Eulero abbiamo

$$\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2N-1)x =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(e^{ix} + e^{3ix} + \cdots + e^{(2N-1)ix} + e^{-ix} + e^{-3ix} + \cdots + e^{-(2N-1)ix}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^{ix}\Big(1 + e^{2ix} + \cdots + e^{2(N-1)ix}\Big) + e^{-ix}\Big(1 + e^{-2ix} + \cdots + e^{-2(N-1)ix}\Big)\Big]$$

usando l'espressione per la serie geometrica otteniamo

$$\frac{1}{2}\Big(e^{ix}\frac{1-e^{2Nix}}{1-e^{2ix}} + e^{-ix}\frac{1-e^{-2Nix}}{1-e^{-2ix}}\Big)$$

a questo punto moltiplicando per $4\sin x = -2i(e^{ix} - e^{-ix})$ si ha la (1).
Abbiamo quindi i punti di massimo o minimo dati da

$$2Nx = \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots, \pi(2N-1)\pi$$

il massimo è in $x^* = \pi/(2N)$.
Calcoliamo la somma parziale nel punto di massimo x^*:

$$S_{2N-1}(x^*) = \frac{4}{\pi}\Big(\sin\frac{\pi}{2N} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N-1}\sin\frac{2N-1}{2N}\pi\Big) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\pi}{N}\Big(\frac{\sin\frac{\pi}{2N}}{\frac{\pi}{2N}} + \cdots + \frac{\sin\frac{2N-1}{2N}\pi}{\frac{2N-1}{2N}\pi}\Big)\Big]$$

Notiamo il termine tra parentisi quadra è una somma di Riemann

$$\Delta x\Big(\frac{\sin x_1}{x_1} + \frac{\sin x_2}{x_2} + \cdots + \frac{\sin x_{N-1}}{x_{N-1}}\Big)$$

ove $x_1 = \frac{\pi}{2N}, x_2 = x_1 + \Delta x, \cdots, x_n = x_{n-1} + \Delta x$, $\Delta x = \frac{\pi}{N}$, per $N \to \infty$ tende

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx\,.$$

Il valore numerico di questo intehrale può essere facilmente calcolato con ottima approssimazione:

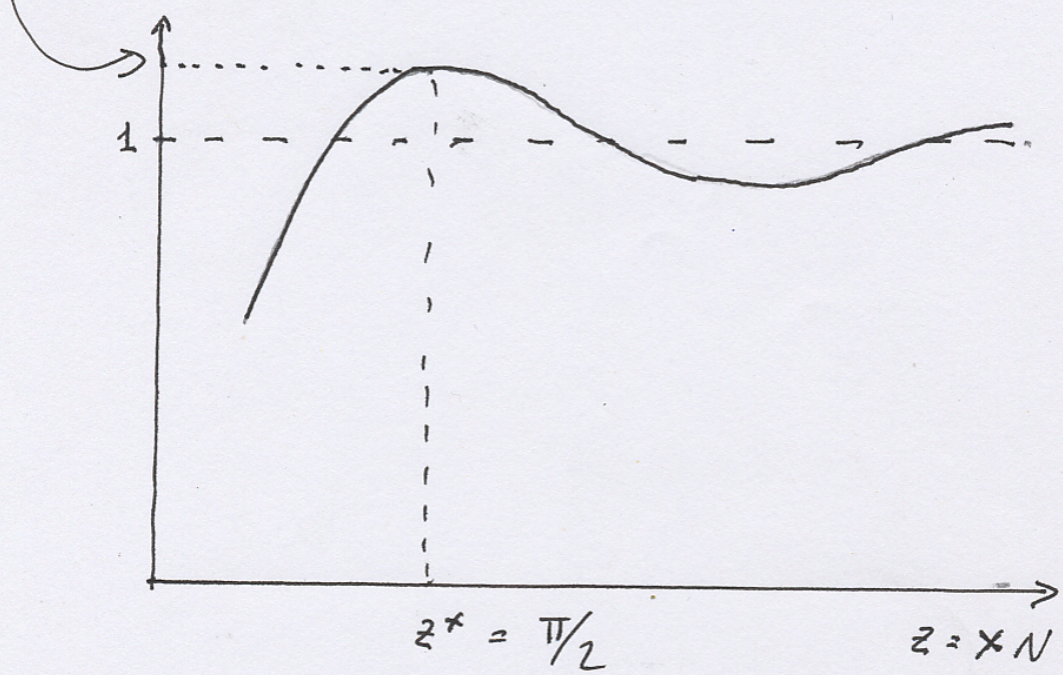
$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\pi \Big(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\Big) dx = \pi - \frac{\pi^3}{3\cdot 3!} + \frac{\pi^5}{5\cdot 5!} - \frac{\pi^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

la convergenza è molto rapida, bastano quindi pochi termini, così otteniamo

$$\lim_{N\to\infty} S_{2N-1}(\frac{\pi}{2N}) = 1.18..$$

mentre $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, abbiamo quindi una differenza che è circa il 9% della discontinuità $\Delta f = 2$
In generale data una funzione periodica con punti di discontinuità di prima specie, la sua serie di Fourier troncata, anche per $N \to \infty$ si discosta dal valore giusto nei punti di discontinuità di una quantità che non tende a zero: il massimo scostamento (circa il 9% della discontinuità) è a una distanza $O(1/N)$) dal punto di discontinuità. Il fenomeno di Gibbs è ben evidente osservando la somma parziale S_{2N-1} in funzione della variabile $z = xN$: per $N \gg 1$ (in pratica già per $N \sim 40$) si osserva chiaramente in massimo nel punto $z_* = \pi/2$, vedi Figura.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx \simeq 1.18$$



S_{2N-1} vs $z = xN$ per $N \gg 1$