QUALCHE ESERCIZIO di PROBABILITÀ

E 1 Dimostrare che:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{E.1}$$

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(C\cap B)+P(A\cap B\cap C)\ . \tag{E.2}$$

E 2 Dati due eventi A e B tali che $P(A) = 3/4$ e $P(B) = 1/3$ mostrare che $P(A \cap B) > 1/12$.

E 3 Mostrare che non possono esistere due insiemi A e B tali che $P(A) = 4/10$, $P(B) = 3/10$ e $P((\Omega - A) \cap (\Omega - B)) = 2/10$.

E 4 Trovare le probabilità di vincita al lotto per il singolo estratto, l'ambo, il terno etc. Si ricordi che nel gioco del lotto si estraggono 5 numeri da un contenitore che ne contiene 90.

E 5 Un dado non truccato è lanciato 2 volte, calcolare la probabilità
a) di avere un solo 6;
b) che entrambi i numeri siano pari;
c) che la somma dei numeri sia 4;
d) che la somma dei numeri sia un multiplo di 3.

E 6 Una moneta non truccata è lanciata N volte, calcolare la probabilità che
a) il risultato sia testa per la prima volta all' N- mo lancio;
b) testa e croce appaiano lo stesso numero di volte (ovviamente N deve essere pari);
c) venga testa esattamente 2 volte;
d) venga testa almeno 2 volte.

E 7 Le industrie I e II producono pezzi difettosi con probabilità 1/5 e 1/50 rispettivamente. Sapendo che la produzione dell' industria I è doppia di quella della II, calcolare:
a) la probabilità di trovare un pezzo difettoso;
b) la probabilità che un pezzo trovato difettoso provenga dall' industria I.

E 8 Date due variabili X ed Y indipendenti che valgono $k = 1, 2, ...$ con probabilità 2^{-k}, calcolare la probabilità che
a) $X = Y$;
b) $X < Y$;
c) X sia il triplo di Y.

E 9 Si assuma che la probabilità della nascita di un maschio, indipendentemente dalle nascite precedenti, sia $P = 1/2$ e si adotti la seguente strategia di pianificazione familiare: si insiste a fare figli finchè non nasce un maschio e poi ci si ferma. Mostrare che, nel limite di vita infinita, il numero medio di figli maschi è uguale a quelle delle femmine.

E 10 Siano $x_1, ..., x_N$ variabili i.i.d. con densità di probabilità $p_X(x)$, calcolare la densità di probabilità delle variabili

$$y_N = \max\{x_1, ..., x_N\} \ , \ z_N = \min\{x_1, ..., x_N\} \ .$$

E 11 Siano x_1 ed x_2 variabili i.i.d., con distribuzione gaussiana a media nulla e varianza unitaria, calcolare la densità di probabilità delle variabili

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ , \ z = \frac{x_2}{x_1} \ .$$

E 12 Siano x_1 ed x_2 variabili i.i.d., con distribuzione gaussiana, mostrare che le variabili

$$z = x_1 + x_2 \ , \ q = x_1 - x_2$$

sono gaussiane ed indipendenti.

E 13 Siano x_1 ed x_2 variabili i.i.d. uniformamente distribuite in $[0, 1]$, si considerino le variabili

$$z_1 = r \cos\psi \ , \ z_2 = r \sin\psi$$

ove

$$r = \sqrt{-2 \ln x_1} \ , \ \psi = 2\pi x_2 \ .$$

Si mostri che z_1 e z_2 sono variabili gaussiane indipendenti a media nulla e varianza unitaria.

E 14 Due amici si danno un appuntamento probabilistico: ci si vede al bar tra le 17 e le 18, si aspetta 5 minuti e poi si esce. Assumendo che i tempi di arrivo siano indipendenti ed uniformemente distribuiti tra le 17 e le 18, calcolare la probabilità di incontrarsi.

E 15 Una variabile aleatoria prende valori $k = 0, 1, ...$ con probabilità P_k. Mostrare che la conoscenza delle probabilità $\{P_k\}$ è sempre equivalente (anche nel caso k possa assumere un numero infinito di valori) alla funzione generatrice $G(s) = P_0 + sP_1 + s^2P_2 + ...$, cioè da $G(s)$ si possono sempre determinare le probabilità $\{P_k\}$.

E 16 Siano X ed Y variabili Poissoniane indipendendi, con parametri rispettivamente λ_x e λ_y, calcolare $P(X = k|X + Y = n)$.

E 17 Si consideri un dado non truccato, calcolare un numero medio di lanci per avere per la prima volta 6.

E 18 Per incentivare le vendite un supermercato inserisce nelle scatole di biscotti un bollino numerato da 1 a 5. Dopo aver collezionato tutti i numeri si ha diritto ad una scatola gratis. Calcolare il numero medio di scatole da comprare per averne una gratis.

Si generalizzi al caso con N bollini.

E 19 Siano X ed Y indipendenti con densità di probabilità $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ rispettivamente, trovare la densità di probabilità delle variabili $Z = XY$ e $Q = X/Y$.

E 20 L'indipendenza implica la scorrelazione ma non è vero il viceversa. Si condideri il caso con

$$P(X = \pm 1, Y = 1) = P(X = \pm 1, Y = -1) = \frac{1}{6} \ ,$$

$$P(X = 0, Y = \pm 1) = P(X = \pm 1, Y = 0) = 0 \ , \ P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{3} \ .$$

Mostrare che

$$\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle$$

$$P(X = i, Y = i) \neq P(X = i) P(Y = j) \ .$$

E 21 Siano x_1, x_2 e x_3 indipendenti uniformemente distribuite in $[-1, 1]$; mostrare che la densità di probabilità di $z = x_1 + x_2$ e $q = x_1 + x_2 + x_3$ sono rispettivamente

$$p_Z(z) = \begin{cases} (2 - |z|)/4 \ \ se \ |z| < 2 \\ 0 \ \ se \ |z| > 2 \end{cases}$$

$$p_Q(q) = \begin{cases} 0 \ \ se \ |q| > 3 \\ (3 - |q|)^2/16 \ \ se \ 1 \leq |q| \leq 3 \\ (3 - q^2)/8 \ \ se \ 0 \leq |q| \leq 1 \end{cases}$$

E 22 Siano $a_1, ..., a_N$ variabili i.i.d. che prendono valore 0 oppure 1 con uguale probabilità 1/2. Mostrare che nel limite $N \to \infty$ la variabile

$$x_N = \sum_{j=1}^{N} a_j 2^{-j}$$

è distribuita uniformemente in $[0, 1]$.

Ripetere il problema nel caso le a_j prendano valori $0, 1, ..., M - 1$ con uguale probabilità $1/M$ e

$$x_N = \sum_{j=1}^{N} a_j M^{-j} \ .$$

E 23 Date $x_1, ..., x_N$ variabili gaussiane indipendenti tali che x_k ha media m_k e varianza σ_k^2, utilizzando le funzioni caratteristiche mostrare che la variabile

$$y = \sum_{j=1}^{N} x_j$$

è gaussiana con media $\sum_k m_k$ e varianza $\sum_k \sigma_k^2$.

E 24 Date $x_1, ..., x_N$ variabili gaussiane non indipendenti tali che $< x_k >= 0$, $\sigma_k^2 = 1$ e $< x_k x_{k+n} >= g(n)$ mostrare che la variabile

$$y = \sum_{j=1}^{N} x_j$$

è gaussiana con media nulla e varianza

$$N + 2 \sum_{n=1}^{N-1} (N - n) g(n) \ .$$

E 25 Nell' ambito dell' insieme canonico a temperatura T si consideri un gas di N particelle di massa m che si muovono su un quadrato di lato L. Si calcoli la densità di probabilità $p(E)$ dell' energia E, trovare il valore E^* per il quale si ha il massimo e mostrare che

$$\lim_{N \to \infty} \frac{E^*}{< E >} = 1 \ ,$$

ed inoltre per ogni $n > 0$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{< E^n >}{< E >^n} = 1 \ .$$

E 26 Nell' ambito dell' insieme canonico a temperatura T si consideri un sistema unidimensionale di N oscillatori con Hamiltoniana

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^2}{2m} + \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} A_{n,j} x_j x_n$$

ove la matrice $\{A_{n,j}\}$ è simmetrica ed i sui autovalori sono positivi. Si calcoli la densità di probabilità dell' energia E, si confronti il risultato con quello dell' esercizio precedente.

E 27 Nell' ambito dell' insieme canonico a temperatura T si consideri un sistema unidimensionale costituito da N particelle di massa m (indicate come leggere) ed una particella (pesante) di massa M. Le particelle leggere si possono attraversare e si muovono tra $x = 0$ e la posizione X della particella pesante che è soggetta ad un potenziale FX, l' Hamiltoniana del sistema è

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{p_n^2}{2m} + \frac{P_0^2}{2M} + FX \quad ,$$

over P_0 è l'impulso della particella pesante.

a) Calcolare la densità di probabilità della posizione della particella pesante;

b) si segua il sistema nel tempo e si campioni la X ogni volta che una delle particelle leggere tocca il bordo $x = 0$, calcolare la nuova densità di probabilità.

Nota: questo sistema è un modello di termometro, per effettuare una simulazione dinamica è necessario un algoritmo che tenga conto del "bagno termico" in $x = 0$, vedi **E 30**, il problema della determinazione della temperatura dai dati empirici e la sua incertezza è discussa in M. Falcioni, D. Villamaina, A.Vulpiani, A. Puglisi and A. Sarracino, "Estimate of temperature and its uncertainty in small systems", Am. J. Phys. **79**, 777 (2011).

E 28 Siano $x_1, ..., x_N$ variabili di Cauchy i.i.d. con densità

$$p_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad .$$

Si calcoli la densità di probabilità della variabile

$$y = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} x_j \quad .$$

Discutere perchè nel limite $N \gg 1$ non si applica la legge dei grandi numeri.

E 29 Ricordando che la distribuzione di una somma di N variabili Poissoniane è ancora Poissoniana, utilizzando il TLC mostrare che

$$\lim_{N\to\infty} e^{-N}\Big(1 + N + \frac{N^2}{2!} + \frac{N^3}{3!} + ... + \frac{N^N}{N!}\Big) = \frac{1}{2} \quad ,$$

ed inoltre

$$\lim_{N\to\infty} e^{-N} \sum_{k=[N+x_1\sqrt{N}]}^{[N+x_2\sqrt{N}]} \frac{N^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx \quad ,$$

ove [ ] indica la parte intera.

E 30 Una particella si muove con velocità costante sul segmento $[0, L]$, quando tocca il bordo $x = L$ la velocità cambia segno, invece quando tocca $x = 0$ viene estratta una nuova velocità con densità di probabilità:

$$g(v) = \theta(v) v e^{-v^2/2} \quad ,$$

ove $\theta(v)$ è la funzione gradino, ed ogni estrazione è indipendente dalle altre. Mostrare che, osservando la particella per un tempo molto lungo, per le densità di probabilità si osserverà una gaussiana per la velocità ed una distribuzione uniforme per la posizione:

$$p_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \quad , \quad p_X(x) = \frac{1}{L} \ .$$

Questo risultato è usato nelle simulazioni di meccanica statistica in cui intervengono bagni termici, vedi ad esempio R. Tehver, F. Toigo, J. Koplik and J.R. Banavar, "Thermal walls in computer simulations" Phys. Rev. E **57**, R17 (1998).