• Data la EDO in $1D$

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

ove $f(x)$ é continua, $f''(x) \leq 0$ con $f(x) > 0$ nell'intervallo (x_1, x_2) e negativa fuori da questo intervallo, mostrare che:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty \quad se \quad x(0) < x_1$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_2 \quad se \quad x(0) > x_2\,.$$

Per fare le cose piú semplici assumiamo che $f \to -\infty$ per $x \to -\infty$ etc...

• Mostrare che l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = x^2$$

ammette una soluzione solo fino da un certo tempo t_c che dipende da $x(0)$

• L'equazione

$$\frac{dx}{dt} = ax^{1/3}\ ,\ a > 0$$

con condizione iniziale $x(0) = 0$ non ha un'unica soluzione, potete verificare che le due seguenti espressioni sono soluzioni

$$x_1(t) = 0\ \ ,\ \ x_2(t) = Ct^{3/2}$$

trovare il valore di C.

• Consideriamo una generalizzazione dell' eq. di Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = xg(y)\ ,\ \frac{dy}{dt} = -yf(x)\,, \tag{15}$$

ove $f(0) > 0, g(0) > 0$, inoltre $f(x)$ e $g(y)$ sono funzioni differenziabili e decrescenti, tali che esiste un punto fisso (x^*, y^*), cioé $f(x^*) = g(y^*) = 0$

con $x* > 0$ e $y^* > 0$. Mostrare che il comportamento di questo sistema é qualitativamente simile a di Lotka- Volterra.

- Un anello rigido di raggio R ruota intorno al suo asse verticale passante per il centro, con velocitá angolare ω. Un piccolo anello (potete pensare ad una perlina) di massa m (vedrete che il valore della massa é irrilevante) si muove, senza attrito lungo l'anello. Mostrare che se $\omega < \omega_0 = \sqrt{g/R}$ (ove g é l'accelerazione di gravitá) il punto fisso con la perlina ferma nel punto piú basso dell'anello é stabile.
Discutere cosa succede per $\omega > \omega_0 = \sqrt{g/R}$.

- Si consideri il sistema

$$\frac{dx}{dt} = yz\ ,\ \frac{dy}{dt} = -2xz\ ,\ \frac{dz}{dt} = xy\,,$$

a) mostrare che $x^2 + y^2 + z^2 = costante$;
b) discutere la stabilitá dei punti fissi sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
c) cercare di capire il comportamento qualitativo nei casi il metodo basato sulle linearizzazione non funziona.

- Indicando con $\mathbf{v} = (a_1, ..., a_N, b_1, ..., b_N)$ il vettore che identifica il polinomio trigonometrico
  $f(x) = a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + ... + a_N \cos(Nx)+$
  $b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + ... + b_N \sin(Nx)$
  trovare la matrice $\mathbf{A}$ corrispondente all'operazione di derivata e la matrice $\mathbf{B}$ corrispondente all'operazione derivata seconda.

- Dato un vettore in R^2 trovare la matrice $\mathbf{A}(\theta)$ associata ad una rotazione di un angolo θ, e mostrare che $\mathbf{A}(\theta_1 + \theta_2) = \mathbf{A}(\theta_1)\mathbf{A}(\theta_2)$

- Dato il vettore $(u_1, ..., u_n)$ di norma unitaria trovare la matrice che descrive il suo proiettore, trovare cioé A_{ij} tali che

$$w_i = \sum_j A_{ij} v_j \ \ ove \ \ \mathbf{w} = \mathcal{P}_{\mathbf{u}} \mathbf{v}$$

• Mostrare che

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é un proiettore e trovate il vettore sul quale proietta.

• Si consideri la seguente regola iterativa

$$x_{t+1} = \frac{1}{3} x_t + \frac{2}{3} y_t \ , \ y_{t+1} = \frac{3}{5} x_t + \frac{4}{15} y_t \ ,$$

mostrare che per ogni condizione iniziale $x_0 > 0, y_0 > 0$ si ha

$$\lim_{t \to \infty} x_t = \lim_{t \to \infty} y_t = 0 \, .$$

• Mostrare che gli autovalori $\mathbf{U}$ di un operatore unitario sono necessariamente sul cerchio unitario, cioé $|\lambda| = 1$

• Mostrare che la l'operazione di rotazione di un angolo θ in R^2 é un operatore unitario. Esistono dei valori di θ per i quali l'operatore é autoaggiunto?

• Verificare che il

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha un autovalore nullo, mostrare che in generale in N dimensioni un proiettore ha $N - 1$ autovalori nulli.

- Mostrare che se $\mathbf{A}$ é autoggiunta allora per ogni a reale la matrice

$$\mathbf{B} = e^{ia\mathbf{A}}$$

é unitaria.

- Calcolare le potenze della seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

- Calcolare l'esponenziale della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

- Calcolare l'esponenziale della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

- Data l'equazione differenziale

$$\frac{dx_n}{dt} = \sum_{n=1}^{N} A_{nk} x_k + f_n \ \ , \ \ n = 1, 2, ..., N$$

ove $A_{ij} = 1$ per ogni coppia (i, j) e $f_i = 1$ scrivere $\mathbf{x}(t)$ a partire dalla condizione iniziale $x_i(0) = 1/N$.

• Per due matrice $N \times N$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ in genere

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} \neq e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$$

mostrare che se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sono diagonalizzabile con la stessa trasformazione $\mathbf{S}$ allora

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} .$$

Mostrare che la relazione precedente vale se le matrice $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ commutano cioé

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} .$$

• Data la matrice $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ ove tutti gli autovalori di $\mathbf{B}$ sono diversi da 1 ed inoltre $\mathbf{B}^n = 0$ per $n \geq 4$ trovare $\mathbf{A}^{-1}$ in termini di potenze di $\mathbf{B}$.

• Discutere il calcolo dell'integrale

$$\int_a^b e^{Nf(x))}\, dx \qquad (G.4)$$

per $N \gg 1$ nel caso in cui il punto di massimo di $f(x)$, é $x_0 = a$ oppure $x_0 = b$

• Discutere il calcolo dell'integrale in (G.4) nel caso in cui il massimo di $f(x)$, é $x_0 < a$ oppure $x_0 > b$

• Discutere il calcolo dell'integrale in (G.4) nel caso in cui si hanno due punto di massimo di $f(x)$.

• Discutere il calcolo dell'integrale in (G.4) nel caso in cui il massimo in x_0 é di tipo quartico:

$$f(x) \simeq f_0 - \frac{1}{4!}|f_0''''|(x - x_0)^4 .$$

• Data l'equazione del calore con $x \in (0, \pi)$ e
condizioni al bordo $f(0, t) = f(\pi, t) = 0$
condizione iniziale $f(x, 0) = \sin^3 x$
trovare $f(x, t)$.

• Data l'equazione del calore con $x \in (0, 3)$ e
condizioni al bordo $f(0, t) = 0$ e $\partial_x f(x, t)|_3 = 0$
condizione iniziale $f(x, 0) = \sin(\pi x/2) - \sin(5\pi x/6)$
trovare $f(x, t)$.

• Data l'eq.

$$\partial_t f(x, t) + u\partial_x f(x, t) = D\partial^2_{xx} f(x, t)$$

sulla retta, con condizione iniziale

$$f(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

si calcoli $f(x, t)$.

• Data l'eq.

$$\partial_t f(x, y, t) = D\partial^2_{xx} f(x, y, t) + D\partial^2_{yy} f(x, y, t)$$

nel quadrato $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ con condizioni al bordo

$$f(x, y, t)\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

ove $\partial\Omega$ indica il bordo del quadrato, e condizione iniziale

$$f(x, y, 0) = \sin x \sin 2y + \sin 3x \sin 5y$$

• Si consideri l'eq.

$$\partial^2_{tt}\psi(x,t) + C\partial^4_{xxxx}\psi(x,t) = 0 \ .$$

sul segmento $(0, \pi)$ con condizioni al bordo

$$\psi(0,t) = \psi(\pi, 0) = 0$$

e condizioni iniziali

$$\psi(x,0) = 2\sin x - 4\sin 5x + \sin 8x$$

$$\partial_t \psi(x,t)\Big|_{t=0} = 0$$

Provate il primo tempo T tale che

$$\psi(x,T) = \psi(x,0)$$

• Determinare la soluzione delll'eq. di Laplace sul cerchio con condizione al bordo

$$u(1,\theta) = 3 - \sin\theta + 4\cos 5\theta$$

• Determinare la soluzione dell'eq. di Laplace sul quadrante positivo (cioé $x \geq 0$, $y \geq 0$ del cerchio unitario, con le condizione al bordo

$$u(1,\theta) = (\sin 2\theta)^2 - \frac{1}{8}\sin 2\theta \ ,$$

$$u(r, \theta = 0) = u(r, \theta = \pi/2) = 0 \ \ per \ \ r < 1$$

• Calcolare

$$\int_0^\infty \delta(x^2 - 1) e^x \, dx$$

- Calcolare

$$\int_{-1}^{4} \delta(\sin x) \cos x \, dx$$

- Calcolare

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} \delta(\cos x) 2^{-x} \, dx$$

- Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\infty} \delta(e^{\lambda x} \, \sin x) x \, dx$$

- Si consideri l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n\tau) \ , \ a > 0$$

indicando con x_k la x al tempo $k\tau + \epsilon$, trovare la relazione tra x_k e x_{k-1} e calcolare $\lim_{k\to\infty} x_k$.
SUGGERIMENTO: si studi il problema dal tempo $k\tau + \epsilon$ fino a $(k+1)\tau - \epsilon$ e poi da $(k+1)\tau - \epsilon$ a $(k+1)\tau + \epsilon$; una volta trovata la la relazione tra x_k e x_{k-1} cercate di fare un grafico per capire il limite quando $k \to \infty$, forse avete giá visto questo trucco, risalente a Newton.

- Si consideri l'equazione

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n\tau)$$

ove $\mathbf{A}$ é una matrice $N \times N$ con autovalori reali negativi e distinti e $\mathbf{b}$ é un vettore, indicando con $\mathbf{x}_k$ la $\mathbf{x}$ al tempo $k\tau + \epsilon$, trovare la relazione tra $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{x}_{k-1}$ e calcolare $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$.

- Data una funzione $f(x)$ pari ($f(x) = f(-x)$) della forma $f(x) = g(x/L)$ tale che la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(k)$ decade a zero piú velocemente di $|k|^{-2}$, definiamo

$$\Delta x = \frac{\int |xf(x)|dx}{\int |f(x)|dx}$$

e

$$\Delta k = \frac{\int |k\hat{f}(k)|dk}{\int |\hat{f}(k)|dk}$$

mostrare che si ha sempre, indipendentemente dal volare di L

$$\Delta k \Delta x = costante$$

- Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

- Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad |x| > \Delta \\ 1 - \left|\frac{x}{\Delta}\right| \quad , \quad |x| < \Delta \end{cases}$$

- Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad |x| > \Delta \\ 1 \quad , \quad |x| < \Delta \end{cases}$$

• Sia $f(x)$ una funzione continua e differenziabile in $(-\pi, \pi)$ con $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, ad esempio

$$f(x) = (x^2 - \pi^2)^2 \, e^{-x^4}$$

calcolare $\lim_{N\to\infty} F_N(x)$ ove

$$F_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} n \cos nx \sin nx' f((x') \, dx' \ , \ x \in (-\pi, \pi)$$

• Si consideri l'equazione sulla retta,

$$\partial_t f(x,t) = g(t) \partial^2_{xx} f(x,t)$$

con condizioni al bordo

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,t) = 0$$

e condizione iniziale

$$f(x,0) = e^{-x^2}$$

ove $g(t)$ é limitata e monotona decrescente, mostrare che se $g(t)$ tende a 0 abbastanza velocemente per $t \to \infty$ allora

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = F(x)$$

discutere il caso

$$g(t) = \frac{1}{(1+t)^\gamma}$$

al variare di γ.

• Si consideri l'equazione sulla retta,

$$\partial_t f(x,t) = \partial^2_{xx} f(x,t) - f(x,t)$$

con condizioni al bordo

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x,t) = 0$$

e condizione iniziale

$$f(x,0) = e^{-x^2}$$

calcolare $f(x,t)$

• Si considerino N variabili $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ indipendenti identicamente distribuite con

$$p(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$$

calcolare la densitá di probabilitá di

$$y_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n$$

e discutere il caso $N \gg 1$.

• Si considerino N variabili $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ indipendenti gaussiane con media $\{m_1, m_2, ..., m_N\}$ e varianza $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_N^2\}$, calcolare la densitá di probabilitá di

$$y_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$